CB n°9 - Géométrie - Sujet 1

Exercice 1 : Géométrie du plan

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct, on considère les droites D_1, D_2 et D_3 d'équations respectives $2x - y + 1 = 0$, $4x - 2y + 1 = 0$ et $x + 2y - 2 = 0$

1a. Justifier que D_1 et D_2 sont strictement parallèles.
D_1 et D_2 admettent pour vecteurs normaux $\overrightarrow{n_1}(2;-1)$ et $\overrightarrow{n_2}(4;-2)$ respectivement.
$\overrightarrow{n_2} = 2\overrightarrow{n_1}$ donc les droites sont parallèles. Le point A de coordonnées $(0;1)$ est sur D_1 mais n'appartient pas à D_2 ; elles sont donc strictement parallèles.

b. Calculer la distance entre ces deux droites (c'est-à-dire la distance minimale entre un point de D_1 et un point de D_2).
La distance entre les deux droites est la distance entre un point quelconque de D_1 (par exemple A) et D_2 ; d'où : $d(D_1, D_2) = \dfrac{|-2+1|}{\sqrt{16+4}} = \dfrac{\sqrt{5}}{10}$.

2. Justifier que D_1 et D_3 sont perpendiculaires, et déterminer les équations des bissectrices de ces deux droites (c'est-à-dire les droites dont les points sont équidistants de D_1 et D_3).
D_3 admet $\overrightarrow{n_3}(1;2)$ pour vecteur normal. $\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_3} = 0$ donc les droites D_1 et D_3 sont perpendiculaires.
Par ailleurs le point $M(x;y)$ est à équidistance de D_1 et D_3 si, et seulement si
$\dfrac{|2x-y+1|}{\sqrt{5}} = \dfrac{|x+2y-2|}{\sqrt{5}}$ ce qui donne les équations des deux bissectrices :
$x - 3y + 3 = 0$ et $3x + y - 1 = 0$.

Exercice 2 : Géométrie de l'espace

L'espace $\mathscr{E}$ est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.
On considère les points $A(1;2;3)$, $B(2;-1;2)$ et $C(0;1;-2)$,

les droites $D_1 : \begin{cases} x = 3 - t \\ y = 1 + 2t \\ z = -1 + t \end{cases}$ et $D_2 : \begin{cases} x - y - z + 2 = 0 \\ 2x + 3y - 2 = 0 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$

et les plans $P_1 : 2x - y + 3z - 1 = 0$ et $P_2 : \begin{cases} x = 1 - 2t + 3u \\ y = -2 + t + u \\ z = 4 - t - 2u \end{cases}$, $(t,u) \in \mathbb{R}^2$

1. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés et déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).
$\overrightarrow{AB}(1;-3;-1)$ et $\overrightarrow{AC}(-1;-1;-5)$ ne sont pas colinéaires, donc les points A, B et C ne sont pas alignés.
$M(x;y;z) \in (ABC) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right) = 0$.
On obtient ainsi une équation du plan (ABC) : $7x + 3y - 2z - 7 = 0$

2. Déterminer une équation cartésienne de P_2.
P_2 passe par le point $D(1;-2;4)$ et il est dirigé par les vecteurs $\vec{u}(-2;1;-1)$ et $\vec{v}(3;1;-2)$.
Ainsi, $M(x;y;z) \in P_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{DM} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}) = 0$.
On obtient ainsi une une équation cartésienne de P_2 : $x + 7y + 5z - 7 = 0$.

3. Déterminer une représentation paramétrique de D_2.
En prenant x pour paramètre, on obtient $D_2 : \begin{cases} x = t \\ y = \dfrac{2}{3} - \dfrac{2}{3}t \\ z = \dfrac{4}{3} + \dfrac{5}{3}t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$

4. Déterminer l'intersection de D_1 avec P_1.

$M(x;y;z) \in D_1 \cap P_1 \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = 3 - t \\ y = 1 + 2t \\ z = -1 + t \\ 2x - y + 3z - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = 3 - t \\ y = 1 + 2t \\ z = -1 + t \\ 2(3-t) - (1+2t) + 3(-1+t) - 1 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - t \\ y = 1 + 2t \\ z = -1 + t \\ t = 1 \end{cases} \Leftrightarrow M(2;3;0)$

5. Donner une équation cartésienne du plan P passant par C et contenant D_1.

$D_1 = A_1 + \text{Vect}\left(\overrightarrow{u_1}\right)$ avec $A_1(3;1;-1)$ et $\overrightarrow{u_1}(-1;2;1)$.

$M(x;y;z) \in P \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} \cdot \left(\overrightarrow{CA_1} \wedge \overrightarrow{u_1}\right) = 0$.

On obtient ainsi une équation cartésienne de P : $x + 2y - 3z - 8 = 0$.

6. Donner une équation cartésienne du plan Q contenant D_1 et telle que D_2 et Q sont parallèles.

$D_2 = A_2 + \text{Vect}\left(\overrightarrow{u_2}\right)$ avec $A_2\left(0;\frac{2}{3};\frac{4}{3}\right)$ et $\overrightarrow{u_2}(3;-2;5)$.

$M(x;y;z) \in Q \Leftrightarrow \overrightarrow{A_1M} \cdot \left(\overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{u_2}\right) = 0$.

On obtient ainsi une équation cartésienne de Q : $3x + 2y - z - 12 = 0$.

7. Donner une représentation paramétrique de la droite passant par A, parallèle à P_1 et sécante avec D_1.

Soit $\overrightarrow{n}(2;-1;3)$ un vecteur normal à P_1. On note $\overrightarrow{d}(a;b;c)$ un vecteur directeur de la droite recherchée.

Cette droite étant parallèle à P_1, on a : $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{d} = 0$.

Par ailleurs, la droite recherchée est sécante à D_1, ce qui signifie que les vecteurs $\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{d}$ sont coplanaires, donc que $\overrightarrow{d} \cdot \left(\overrightarrow{AA_1} \wedge \overrightarrow{u_1}\right) = 0$.

On a donc $\begin{cases} 2a - b + 3c = 0 \\ 7a + 2b + 3c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - b + 3c = 0 \\ 5a + 3b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -\frac{11}{9}a \\ b = -\frac{5}{3}a \end{cases}$

On obtient une représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 1 + 9t \\ y = 2 - 15t \\ z = 3 - 11t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

8. Existe-t-il une droite passant par A et sécante avec les deux droites D_1 et D_2 ? Si oui, en donner une représentation paramétrique.

Si une telle droite D existe, notons $\overrightarrow{d}(a;b;c)$ un vecteur directeur. D et D_1 étant sécantes, $\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{d}$ sont coplanaires donc $\overrightarrow{d} \cdot \left(\overrightarrow{AA_1} \wedge \overrightarrow{u_1}\right) = 0$ d'où $7a + 2b + 3c = 0$; de plus, D et D_2 étant sécantes, $\overrightarrow{AA_2}, \overrightarrow{u_2}$ et $\overrightarrow{d}$ sont coplanaires donc $\overrightarrow{d} \cdot \left(\overrightarrow{AA_2} \wedge \overrightarrow{u_2}\right) = 0$ d'où $5a - 3c = 0$

Le vecteur $\overrightarrow{d}(3;-18;5)$ convient, et la droite D admet pour représentation paramétrique :

$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 - 18t \\ z = 3 + 5t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

CB N°9 - GÉOMÉTRIE - SUJET 2

Exercice 1 : Géométrie du plan

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct, on considère les droites D_1 et D_2 d'équations respectives $3x - 4y - 1 = 0$ et $8x + 6y + 1 = 0$

1. Justifier que D_1 et D_2 sont perpendiculaires.
D_1 et D_2 admettent pour vecteurs normaux $\overrightarrow{n_1}(3;-4)$ et $\overrightarrow{n_2}(8;6)$ respectivement.
$\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2} = 0$ donc les droites sont perpendiculaires.

2. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de D_1 et D_2.

$$\begin{cases} 3x - 4y - 1 = 0 \\ 8x + 6y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{25} \\ y = -\dfrac{11}{50} \end{cases}$$

3. Déterminer les coordonnées des points du plan situés à 1 unité de mesure des droites D_1 et D_2.
Un point $M(x;y)$ est situé à 1 unité de mesure de D_1 et de D_2 si, et seulement si
$\dfrac{|3x-4y-1|}{\sqrt{9+16}} = \dfrac{|8x+6y+1|}{\sqrt{64+36}} = 1.$
On obtient les quatre points : $\left(\dfrac{36}{25};-\dfrac{21}{50}\right);\left(-\dfrac{4}{25};-\dfrac{81}{50}\right);\left(\dfrac{6}{25};\dfrac{59}{50}\right);\left(-\dfrac{34}{25};-\dfrac{1}{50}\right)$

Exercice 2 : Géométrie de l'espace

L'espace $\mathscr{E}$ est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$.
On considère les points $A(1;-1;2)$, $B(2;0;-1)$ et $C(1;1;-2)$,

les droites $D_1 : \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 1 + 3t \\ z = -1 - 2t \end{cases}$ et $D_2 : \begin{cases} x - y + z + 1 = 0 \\ 2x + 3z - 1 = 0 \end{cases}$ $, t \in \mathbb{R}$

et les plans $P_1 : x - 3y + 2z = 0$ et $P_2 : \begin{cases} x = t - 3u \\ y = -2 + t + 2u \\ z = 3 - t - 2u \end{cases}$ $, (t,u) \in \mathbb{R}^2$

1. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés et déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).
$\overrightarrow{AB}(1;1;-3)$ et $\overrightarrow{AC}(0;2;-4)$ ne sont pas colinéaires, donc les points A, B et C ne sont pas alignés.
$M(x;y;z) \in (ABC) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right) = 0.$
On obtient ainsi une équation du plan (ABC) : $x + 2y + z - 1 = 0$

2. Déterminer une équation cartésienne de P_2.
P_2 passe par le point $D(0;-2;3)$ et il est dirigé par les vecteurs $\overrightarrow{u}(1;1;-1)$ et $\overrightarrow{v}(-3;2;-2)$.
Ainsi, $M(x;y;z) \in P_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{DM} \cdot (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) = 0.$
On obtient ainsi une une équation cartésienne de P_2 : $y + z - 1 = 0.$

3. Déterminer une représentation paramétrique de D_2.

En prenant x pour paramètre, on obtient $D_2 : \begin{cases} x = t \\ y = \dfrac{4}{3} + \dfrac{1}{3}t \\ z = \dfrac{1}{3} - \dfrac{2}{3}t \end{cases}$ $, t \in \mathbb{R}$

4. Déterminer l'intersection de D_1 avec P_1.

$$M(x;y;z) \in D_1 \cap P_1 \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = 2-2t \\ y = 1+3t \\ z = -1-2t \\ x-3y+2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = 2-2t \\ y = 1+3t \\ z = -1-2t \\ 2-2t-3(1+3t)+2(-1-2t) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2-2t \\ y = 1+3t \\ z = -1-2t \\ t = -\dfrac{1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow M\left(\frac{12}{5}; \frac{2}{5}; -\frac{3}{5}\right)$$

5. Donner une équation cartésienne du plan P passant par C et contenant D_1.

$D_1 = A_1 + \mathrm{Vect}\,(\overrightarrow{u_1})$ avec $A_1(2;1;-1)$ et $\overrightarrow{u_1}(-2;3;-2)$.

$M(x;y;z) \in P \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} \cdot \left(\overrightarrow{CA_1} \wedge \overrightarrow{u_1}\right) = 0$.

On obtient ainsi une équation cartésienne de P : $x - z - 3 = 0$.

6. Donner une équation cartésienne du plan Q contenant D_1 et telle que D_2 et Q sont parallèles.

$D_2 = A_2 + \mathrm{Vect}\,(\overrightarrow{u_2})$ avec $A_2\left(0; \dfrac{4}{3}; \dfrac{1}{3}\right)$ et $\overrightarrow{u_2}(3;1;-2)$.

$M(x;y;z) \in Q \Leftrightarrow \overrightarrow{A_1M} \cdot (\overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{u_2}) = 0$.

On obtient ainsi une équation cartésienne de Q : $4x + 10y + 11z - 7 = 0$.

7. Donner une représentation paramétrique de la droite passant par A, parallèle à P_2 et sécante avec D_1.

Soit $\overrightarrow{n}(1;-3;2)$ un vecteur normal à P_1. On note $\overrightarrow{d}(a;b;c)$ un vecteur directeur de la droite recherchée. Cette droite étant parallèle à P_1, on a : $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{d} = 0$.

Par ailleurs, la droite recherchée est sécante à D_1, ce qui signifie que les vecteurs $\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{d}$ sont coplanaires, donc que $\overrightarrow{d} \cdot \left(\overrightarrow{AA_1} \wedge \overrightarrow{u_1}\right) = 0$.

On a donc $\begin{cases} a - 3b + 2c = 0 \\ 5a + 8b + 7c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - 3b + 2c = 0 \\ 23b - 3c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -\dfrac{23}{3}b \\ b = -\dfrac{37}{3}b \end{cases}$

On obtient une représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 1 - 37t \\ y = -1 + 3t \\ z = 2 + 23t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

8. Existe-t-il une droite passant par A et sécante avec les deux droites D_1 et D_2 ? Si oui, en donner une représentation paramétrique.

Si une telle droite D existe, notons $\overrightarrow{d}(a;b;c)$ un vecteur directeur. D et D_1 étant sécantes, $\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{d}$ sont coplanaires donc $\overrightarrow{d} \cdot \left(\overrightarrow{AA_1} \wedge \overrightarrow{u_1}\right) = 0$ d'où $5a + 8b + 7c = 0$; de plus, D et D_2 étant sécantes, $\overrightarrow{AA_2}, \overrightarrow{u_2}$ et $\overrightarrow{d}$ sont coplanaires donc $\overrightarrow{d} \cdot \left(\overrightarrow{AA_2} \wedge \overrightarrow{u_2}\right) = 0$ d'où $3a + 7b + 8c = 0$

Le vecteur $\overrightarrow{d}(15;-19;11)$ convient, et la droite D admet pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 + 15t \\ y = -1 - 19t \\ z = 2 + 11t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$