# Math. - CC 1 -

*Toutes les réponses seront justifiées. La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction.*

**EXERCICE I**

Résoudre les systèmes suivants (pour le second, on discutera en fonction des valeurs du paramètre $m$) :

$$\begin{cases} x+y+2z=3 \\ x+2y+z=1 \\ 2x+y+z=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x-y+z=m \\ x+my-z=1 \\ x-y-z=1 \end{cases}$$

**EXERCICE II**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

**1.** $\sqrt{x-1}=2-x$

**2.** $|1-x|+|x|=1$

**3.** $-1 \leq \dfrac{3x-2}{5-3x} \leq 1$

**4.** $\dfrac{1}{x+1} \leq \sqrt{1-x}$

**5.** $\cos(x)+\sin(x) \geq 1$

**6.** $\cos(2x)+\cos(x) \geq 0$

**EXERCICE III**

On pose, pour $p \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $S_p = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^p$. Le but de cet exercice est de retrouver les expressions simplifiées de $S_1, S_2$ et $S_3$ par deux méthodes. **On suppose donc que l'on ne connaît pas ces formules**.

**1.** Première méthode :

**a.** En remarquant que pour $k \in \mathbb{N}^*$, $(k+1)^2-k^2=2k+1$, montrer que $n(n+2)=2S_1+n$ et en déduire $S_1$, que l'on suppose connue pour la question suivante.

**b.** En partant de $(k+1)^3-k^3$, montrer que $n(n^2+3n+3)=3S_2+3S_1+n$ et en déduire $S_2$.

**c.** Donner une méthode sur le même principe permettant le calcul de $S_3$ (on ne demande pas de réaliser ce calcul).

**d.** Montrer que, plus généralement, pour $p \in \mathbb{N}^*$ :

$$S_p = \frac{1}{p+1}\left((n+1)^{p+1}-1-\sum_{i=0}^{p-1}\binom{p+1}{i}S_i\right)$$

**2.** Deuxième méthode :

**a.** i. A l'aide d'un changement d'indice, montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \sum_{j=1}^{n}(n+1-j)$.

ii. En déduire que $S_1 = n(n+1)-S_1$ et retrouver ainsi l'expression de $S_1$, que l'on suppose désormais connue pour la suite.

**b.** i. Démontrer que $S_2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i} i\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=j}^{n} i\right)$.

ii. En déduire que $S_2 = \dfrac{1}{2}\left(n^2(n+1)+S_1-S_2\right)$ et retrouver l'expression de $S_2$, que l'on suppose désormais connue pour la suite.

**c.** i. Montrer que $\displaystyle\sum_{(i;j)\in[\![1;n]\!]^2} ij = S_1^2$.

ii. Montrer que $\displaystyle\sum_{1\leq i\leq j\leq n} ij = \frac{1}{2}(S_3+S_2)$.

iii. Déduire des deux questions précédentes l'expression de $S_3$.

**EXERCICE IV**

**1.** On considère la fonction $g$ définie par

$$g(x) = \frac{2x}{1-x^2} - \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$$

**a.** Déterminer le domaine de définition de $g$, noté $\mathscr{D}_g$.

**b.** Étudier la parité de $g$.

**c.** Déterminer les réels $a$ et $b$ tels que :

$$\forall x \in \mathscr{D}_g, \quad g(x) = \frac{a}{1-x} + \frac{b}{1+x} + \ln|1-x| - \ln|x+1|$$

**d.** Étudier les limites de $g(x)$ aux bornes de son domaine de définition, pour $x$ positif.

**e.** Étudier les variations de $g$ et dresser son tableau de variations complet.

**f.** En déduire le signe de $g(x)$.

**2.** On considère la fonction $f$ définie par

$$f(x) = \frac{1}{x}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$$

**a.** Donner le domaine de définition de $f$.

**b.** Étudier la parité de $f$.

**c.** Étudier les limites de $f(x)$ aux bornes de son domaine de définition, pour $x$ positif.

**d.** Étudier les variations de $f$ et dresser son tableau de variations complet.

**e.** En déduire, en fonction du paramètre réel $a$, le nombre de solutions positives de l'équation

$$\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| = ax$$