Math. - CC 1 - Correction

EXERCICE I

Résoudre les systèmes suivants (pour le second, on discutera en fonction des valeurs du paramètre m) :

$$\begin{cases} x+y+2z=3 \\ x+2y+z=1 \\ 2x+y+z=0 \end{cases} \qquad S=\{(-1;0;2)\}$$

$$\begin{cases} x-y+z=m \\ x+my-z=1 \\ x-y-z=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \text{Si } m\neq -1, & S=\left\{\left(\dfrac{m+1}{2};0;\dfrac{m-1}{2}\right)\right\} \\ \text{Si } m=-1, & S=\{(x;x;-1), x\in\mathbb{R}\} \end{cases}$$

EXERCICE II

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1. $\sqrt{x-1}=2-x$

Le domaine de validité de cette équation est $D_v=[1;+\infty[$.

$\sqrt{x-1}=2-x \Leftrightarrow \left((x-1=4-4x+x^2)\wedge(x\in[1;2])\right) \Leftrightarrow x=\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}$ d'où $S=\left\{\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}\right\}$

2. $|1-x|+|x|=1 \quad (*)$

$\rightsquigarrow$ Si $x\leq 0$, $(*)\Leftrightarrow 1-x-x=1\Leftrightarrow x=0$

$\rightsquigarrow$ Si $x\in[0,1]$, $(*)\Leftrightarrow 1-x+x=1\Leftrightarrow 1=1$ Ce qui est toujours vrai

$\rightsquigarrow$ Si $x\geq 1$, $(*)\Leftrightarrow x-1+x=1\Leftrightarrow x=1$

Finalement, $S=[0;1]$

3. $-1\leq \dfrac{3x-2}{5-3x}\leq 1 \quad (*)$

Le domaine de validité de cette équation est $D_v=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{5}{3}\right\}$ et pour $x\in D_v$, on a :

$$(*)\Leftrightarrow \left|\frac{3x-2}{5-3x}\right|\leq 1 \Leftrightarrow \left(\frac{3x-2}{5-3x}\right)^2-1\leq 0 \Leftrightarrow \frac{(3x-2)^2-(5-3x)^2}{\underbrace{(5-3x)^3}_{>0}} \Leftrightarrow (3x-2+5-3x)(3x-2-5+3x)\leq 0$$

$\Leftrightarrow 6x-7\leq 0$ d'où $S=\left]-\infty;\dfrac{7}{6}\right]$

4. $\dfrac{1}{x+1}\leq\sqrt{1-x} \quad (*)$

Le domaine de validité de cette inéquation est $D_v=]-\infty;-1[\cup]-1;1]$

$\rightsquigarrow$ Si $1+x<0$, l'inégalité est toujours vérifiée.

$\rightsquigarrow$ Si $1+x>0$, $(*)\Leftrightarrow \dfrac{1}{(1+x)^2}\leq 1-x \Leftrightarrow \dfrac{1-(1-x)(1+x)^2}{\underbrace{(1+x)^2}_{>0}}\leq 0\Leftrightarrow x(x^2+x-1)\leq 0$

Un tableau de signes, avec la contrainte $x>-1$ donne $x\in\left[0;\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right]$

Finalement, $S=]-\infty;-1[\cup\left[0;\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right]$

5. $\cos(x)+\sin(x)\geq 1 \quad \Leftrightarrow \cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\geq\dfrac{\sqrt{2}}{2} \qquad S=\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left[2k\pi;\frac{\pi}{2}+2k\pi\right]$

6. $\cos(2x)+\cos(x)\geq 0 \quad \Leftrightarrow 2\cos^2(x)+\cos(x)-1\geq 0\Leftrightarrow \cos(x)\in\left[\dfrac{1}{2};1\right]\cup\{-1\}$

$S=\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left(\left[-\frac{\pi}{3}+2k\pi;\frac{\pi}{3}+2k\pi\right]\cup\{(2k+1)\pi\}\right)$

EXERCICE III

On pose, pour $p \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $S_p = \sum_{k=1}^{n} k^p$. Le but de cet exercice est de retrouver les expressions simplifiées de S_1, S_2 et S_3 par deux méthodes. **On suppose donc que l'on ne connaît pas ces formules**.

1. Première méthode :

a. En remarquant que pour $k \in \mathbb{N}^*, (k+1)^2 - k^2 = 2k+1$, montrer que $n(n+2) = 2S_1 + n$ et en déduire S_1, que l'on suppose connue pour la question suivante.

En appliquant la remarque, on obtient :

$\sum_{k=1}^{n}(2k+1) = \sum_{k=1}^{n}(k+1)^2 - \sum_{k=1}^{n} k^2 \underset{\text{télescopage}}{=} (n+1)^2 - 1$, d'où : $2S_1 + n = n^2 + 2n$ et enfin, $S_1 = \dfrac{n(n+1)}{2}$

b. En partant de $(k+1)^3 - k^3$, montrer que $n(n^2+3n+3) = 3S_2 + 3S_1 + n$ et en déduire S_2.

$\forall k \in \mathbb{R}, \quad (k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$; on en déduit que :

$\sum_{k=1}^{n}(3k^2+3k+1) = \sum_{k=1}^{n}(k+1)^3 - \sum_{k=1}^{n} k^3 \underset{\text{télescopage}}{=} (n+1)^3 - 1$, d'où : $3S_2 + 3S_1 + n = n^3 + 3n^2 + 3n$.

En utilisant le résultat précédent, on obtient : $S_2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

c. Donner une méthode sur le même principe permettant le calcul de S_3 (on ne demande pas de réaliser ce calcul).

$\forall k \in \mathbb{R}, (k+1)^4 - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$ d'où l'on obtient : $4S_3 + 6S_2 + 4S_1 + n = (n+1)^4 - 1$.

d. Montrer que, plus généralement, pour $p \in \mathbb{N}^*$:

$$S_p = \frac{1}{p+1}\left((n+1)^{p+1} - 1 - \sum_{i=0}^{p-1}\binom{p+1}{i} S_i\right)$$

La formule du binôme de Newton donne, pour tout $k \in \mathbb{R}$:

$(k+1)^{p+1} - k^{p+1} = \sum_{i=0}^{p+1}\binom{p+1}{i} k^i - k^{p+1} = \sum_{i=0}^{p}\binom{p+1}{i} k^i + \binom{p+1}{p+1} k^{p+1} - k^{p+1} = \sum_{i=0}^{p}\binom{p+1}{i} k^i$

Par télescopage on obtient :

$(n+1)^{p+1} - 1 = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{p}\binom{p+1}{i} k^i = \sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{n}\binom{p+1}{i} k^i = \sum_{i=1}^{p}\binom{p+1}{i}\sum_{k=1}^{n} k^i = \sum_{i=1}^{p}\binom{p+1}{i} S_i$

d'où l'on a : $(n+1)^{p+1} - 1 = \sum_{i=0}^{p-1}\binom{p+1}{i} S_i + \binom{p+1}{p} S_p$ puis le résultat attendu, car $\binom{p+1}{p} = p+1$.

2. Deuxième méthode :

a. i. A l'aide d'un changement d'indice, montrer que $\sum_{k=1}^{n} k = \sum_{j=1}^{n}(n+1-j)$.

On effectue le changement d'indice $j = n+1-k$

ii. En déduire que $S_1 = n(n+1) - S_1$ et retrouver ainsi l'expression de S_1, que l'on suppose désormais connue pour la suite.

On obtient directement $S_1 = \sum_{j=1}^{n}(n+1) - S_1 = n(n+1) - S_1$, puis $S_1 = \dfrac{n(n+1)}{2}$

b. i. Démontrer que $S_2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i} i\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=j}^{n} i\right)$.

On a : $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} i = \sum_{i=1}^{n} i\left(\sum_{j=1}^{i} 1\right) = \sum_{i=1}^{n} i \times i = S_2$.

L'autre égalité s'obtient en intervertissant les sommes triangulaires telles que $1 \leq j \leq i \leq n$.

ii. En déduire que $S_2 = \dfrac{1}{2}\left(n^2(n+1) + S_1 - S_2\right)$ et retrouver l'expression de S_2, que l'on suppose désormais connue pour la suite.

Remarquons tout d'abord, en utilisant le résultat précédent, que pour $j \in [\![2, n]\!]$:

$\sum_{i=j}^{n} i = \sum_{i=1}^{n} i - \sum_{i=1}^{j-1} i = \dfrac{n(n+1)}{2} - \dfrac{j(j-1)}{2}$ et que cette égalité reste vraie pour $j = 1$.

Ainsi, $S_2 = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{n(n+1)}{2} - \frac{j(j-1)}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(n^2(n+1) - \sum_{j=1}^{n} (j^2 - j) \right) = \frac{1}{2} \left(n^2(n+1) + S_1 - S_2 \right)$.

Enfin, on obtient : $\dfrac{3}{2} S_2 = \dfrac{1}{2} \left(n^2(n+1) + \dfrac{n(n+1)}{2} \right)$, d'où $S_2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

c. i. Montrer que $\displaystyle\sum_{(i;j) \in [\![1;n]\!]^2} ij = S_1^2$.

$$\sum_{(i;j) \in [\![1,n]\!]^2} ij = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} ij = \sum_{i=1}^{n} i \sum_{j=1}^{n} j = S_1^2$$

ii. Montrer que $\displaystyle\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} ij = \frac{1}{2}(S_3 + S_2)$.

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} ij = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} ij = \sum_{j=1}^{n} j \sum_{i=1}^{j} i = \sum_{j=1}^{n} j \frac{j(j+1)}{2} = \frac{1}{2}(S_3 + S_2)$$

iii. Déduire des deux questions précédentes l'expression de S_3.

On a : $\displaystyle\sum_{(i;j) \in [\![1;n]\!]^2} ij = 2 \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} ij - \sum_{i=1}^{n} i^2 = 2 \left(\frac{1}{2}(S_3 + S_2) \right) - S_2 = S_3$.

D'où $S_3 = S_1^2$.

EXERCICE IV

1. On considère la fonction g définie par

$$g(x) = \frac{2x}{1 - x^2} - \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right|$$

a. Déterminer le domaine de définition de g, noté $\mathscr{D}_g$ $= \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$.

b. Étudier la parité de g.

g est impaire.

c. Déterminer les réels a et b tels que :

$$\forall x \in \mathscr{D}_g, \quad g(x) = \frac{a}{1-x} + \frac{b}{1+x} + \ln|1-x| - \ln|x+1|$$

$a = 1, b = -1$

d. Étudier les limites de $g(x)$ aux bornes de son domaine de définition, pour x positif.

En utilisant la forme de la question précédente, on obtient :

$\forall x \in \mathscr{D}_g, \quad g(x) = \dfrac{1 + (1-x)\ln|1-x|}{1-x} - \dfrac{1}{1+x} - \ln|1+x|$.

Par croissances comparées, $\displaystyle\lim_{x \to 1} (1-x)\ln|1-x| = \lim_{X \to 0} X \ln|X| = 0$ donc par sommes et quotient :

$\displaystyle\lim_{x \to 1^-} g(x) = +\infty$; $\displaystyle\lim_{x \to 1^+} g(x) = -\infty$

$\forall x \in \mathscr{D}_g, \quad g(x) = \dfrac{2}{\frac{1}{x} - x} - \ln \left| \dfrac{\frac{1}{x} + 1}{\frac{1}{x} - 1} \right|$ d'où par composition, sommes et quotients : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$

e. Étudier les variations de g et dresser son tableau de variations complet.

D'après les théorèmes généraux, g est dérivable sur son domaine et pour tout $x \in \mathscr{D}_g, g'(x) = \dfrac{4x^2}{(1-x^2)^2} \geq 0$.

On en déduit que g est croissante sur ses intervalles de définition.

On obtient les variations complètes et l'ensemble des limites en utilisant la parité de g :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
g	0	$\nearrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	0

f. En déduire le signe de $g(x)$.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$g(x)$		$+$	||	$-$	0	$+$	||	$-$	

2. On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{1}{x} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right|$$

a. Donner le domaine de définition de f. $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}^* \setminus \{-1; 1\}$

b. Étudier la parité de f.
f est paire.

c. Étudier les limites de $f(x)$ aux bornes de son domaine de définition, pour x positif.
$\forall x \in \mathscr{D}_f, \quad f(x) = \dfrac{\ln|1+x|}{x} - \dfrac{\ln[1-x|}{x}$.
On a : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1-x)}{x} = -1$ donc, par somme, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 2$.
De plus $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1+x}{1-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{1}{x}+1}{\frac{1}{x}-1} = -1$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, par produit.
Enfin, par composition et produit, $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = +\infty$.

d. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations complet.
Les théorèmes généraux donnent f dérivable sur son domaine, et pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.
Ainsi, d'après le signe de $g(x)$ établi précédemment, et en utilisant la parité de f on obtient :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
f	0	$\nearrow$	$+\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	2 || 2	$\nearrow$	$+\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	0

e. En déduire, en fonction du paramètre réel a, le nombre de solutions positives de l'équation

$$\ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| = ax$$

Remarquons tout d'abord que 0 est solution de l'équation quel que soit le réel a.

Pour $x \neq 0$, on cherche le nombre de solutions de l'équation $f(x) = a$. La fonction f étant continue sur son domaine de définition, le théorème des valeurs intermédiaires donne :
$\leadsto$ Si $a \leq 0$, l'équation $f(x) = a$ n'admet aucune solution ;
$\leadsto$ Si $0 < a \leq 2$, l'équation $f(x) = a$ admet 2 solutions, dont une positive ;
$\leadsto$ Si $a > 2$, l'équation $f(x) = a$ admet 4 solutions, dont 2 positives.