Math. - CC 2 - Correction

EXERCICE I

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\mathrm{d}t \quad \text{et, pour } n \neq 0, \qquad I_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t$$

1. Calculer W_0 et W_1. $\quad W_0 = \frac{\pi}{2}$; $\quad W_1 = 1$

2. a. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$$

Pour $n \in \mathbb{N}, W_{n+2} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1}(t)\sin(t)\mathrm{d}t$.

En posant, pour $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ $\left| \begin{array}{lcl} u(t) = \sin^{n+1}(t) & \Rightarrow & u'(t) = (n+1)\sin^n(t)\cos(t) \\ v'(t) = \sin(t) & \Leftarrow & v(t) = -\cos(t) \end{array}\right.$

u et v étant de classe C^1 sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ le théorème d'intégration par parties donne :

$W_{n+2} = \left[-\sin^{n+1}(t)\cos(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1)\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\cos^2(t)\mathrm{d}t = (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)(1-\sin^2(t))\mathrm{d}t$

$= (n+1)W_n - (n+1)W_{n+2}$ $\quad$ d'où le résultat.

b. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}, W_n > 0$.

$W_0 > 0; W_1 > 0$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on suppose que $W_p > 0, \forall p \in [\![0, n]\!]$.

Alors, d'après **2a.**, $W_{n+1} = \frac{n}{n+1} W_{n-1} > 0$. Ainsi, par principe de récurrence, $W_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

3. a. Montrer que la suite (W_n) est décroissante.

Soit $n \in \mathbb{N}$; $W_{n+1} - W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^{n+1}(t) - \sin^n(t)\right)\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\left(\sin(t) - 1\right)\mathrm{d}t$.

Or, $\forall t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin^n(t)\left(\sin(t)-1\right) \leq 0$ donc par positivité de l'intégrale, $W_{n+1} - W_n \leq 0$.

b. Déduire des questions **2.a** et **3.a** que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{W_{n+1}}{W_n} = 1$.

(W_n) étant strictement positive et décroissante, pour $\in \mathbb{N}$, $\frac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{W_{n-1}}{W_n} \geq 1$.

De plus, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{W_{n+1}}{W_n} = \frac{W_{n+1}}{W_{n-1}} \times \frac{W_{n-1}}{W_n} = \frac{n}{n+1} \times \frac{W_{n-1}}{W_n} \geq \frac{n}{n+1}$.

Ainsi, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{n}{n+1} \leq \frac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1$ donc le théorème d'encadrement donne $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{W_{n+1}}{W_n} = 1$.

4. a. Montrer que la suite $((n+1)W_nW_{n+1})$ est constante (et préciser cette constante).

D'après la question **2a.** il vient immédiatement pour $n \in \mathbb{N}$:

$(n+1)W_nW_{n+1} = (n+2)W_{n+2}W_{n+1} = (n+2)W_{n+1}W_{n+2}$, donc la suite $((n+1)W_nW_{n+1})$ est constante et vaut $W_0W_1 = \frac{\pi}{2}$.

b. En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt{2n}W_n = \sqrt{\pi}$.

Des questions précédentes, on a, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$nW_nW_{n-1} = \frac{\pi}{2}$ donc $2nW_n^2 = \pi\frac{W_n}{W_{n-1}}$, puis, $\sqrt{2n}W_n = \sqrt{\pi} \times \sqrt{\frac{W_n}{W_{n-1}}}$; la question **3b.** permet de conclure.

5. a. Montrer que $I_n = \sqrt{n}W_{2n+1}$.

On posera le changement de variable $t = \sqrt{n}\cos(u)$ *dans l'intégrale* I_n.

$$I_n \underset{\substack{t = \sqrt{n}\cos(u) \\ \Rightarrow \mathrm{d}t = -\sqrt{n}\sin(u)\mathrm{d}u}}{=} -\sqrt{n}\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \left(1 - \cos^2(u)\right)^n \sin(u)\mathrm{d}u = \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}(u)\mathrm{d}u = \sqrt{n}W_{2n+1}$$

b. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$.

Pour $n \in \mathbb{N}, I_n = \sqrt{n}W_{2n+1} = \sqrt{2(2n+1)}W_{2n+1} \times \sqrt{\frac{n}{2(2n+1)}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

EXERCICE II

Les parties I et II sont indépendantes.

Partie I
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$y'' - y' + y = x^4 \qquad (L)$$

Les solutions de l'équation caractéristique sont $\dfrac{1}{2} \pm \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;
on en déduit l'ensemble des solution de l'équation homogène associée à (L) :
$S_H = \left\{ y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, y(x) = \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} \left(A\cos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right) + B\sin\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right), (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.
On cherche une solution particulière de (L) sous la forme d'un polynôme de degré 4, et on obtient par identification : $x \mapsto x^4 + 4x^3 + 24x + 24$.
Finalement, l'ensemble des solutions de (L) est :
$S_L = \left\{ y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, y(x) = \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} \left(A\cos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right) + B\sin\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right) + x^4 + 4x^3 - 24x - 24, (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

Partie II
Le but de cette partie est de trouver les solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle :

$$x^2y'' - xy' + y = x^4 \qquad (E)$$

1. Résoudre dans $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle

$$y' + \frac{1}{x}y = x \qquad (E_1)$$

$\displaystyle\int^x -\frac{1}{t}\mathrm{d}t = -\ln|x| + C^{te}$;
on en déduit l'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène associée à (E_1) :
$S_{H_1} = \left\{ y_0 : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}, y_0(x) = \dfrac{C}{x}, C \in \mathbb{R} \right\}$.
La méthode de variation de la constante donne pour solution particulière $y_p : x \mapsto \dfrac{1}{3}x^2$.
On en déduit l'ensemble des solutions de (E_1) :
$S_{E_1} = \left\{ y : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}, y(x) = \dfrac{C}{x} + \dfrac{1}{3}x^2, C \in \mathbb{R} \right\}$.

2. On va chercher les solutions de l'équation différentielle (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ sous la forme $\varphi : x \mapsto x\lambda(x)$ où λ est une fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$, deux fois dérivable.

a. Déterminer φ' et φ'' à l'aide de λ, λ' et λ''.
$\varphi'(x) = x\lambda'(x) + \lambda(x)$; $\quad \varphi''(x) = x\lambda''(x) + 2\lambda'(x)$

b. Montrer que φ est solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ si, et seulement si λ' est solution de (E_1) sur $\mathbb{R}_+^*$.
$\varphi \in S_E \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}_+^*, x^2\left(x\lambda''(x) + 2\lambda'(x)\right) - x\left(x\lambda'(x) + \lambda(x)\right) + x\lambda(x) = x^4$
$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}_+^*, x^3\lambda''(x) + x^2\lambda'(x) = x^4 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \lambda''(x) + \dfrac{1}{x}\lambda'(x) = x \Leftrightarrow \lambda' \in S_{E_1}$

3. Déduire des questions précédentes l'expression de λ, puis de φ.
D'après les questions précédentes, il existe une constante C_1 telle que pour $x \in \mathbb{R}_+^*, \lambda'(x) = \dfrac{C_1}{x} + \dfrac{1}{3}x^3$.
On en déduit qu'il existe une constante C_2 telle que pour $x \in \mathbb{R}_+^*$: $\lambda(x) = C_1\ln(x) + \dfrac{1}{9}x^3 + C_2$;
on obtient donc : $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left(C_1\ln(x) + C_2\right)x + \dfrac{1}{9}x^4 \end{array} \right.$

EXERCICE III

1. Démontrer que

$$\forall x > 0, \quad \text{Arctan}\left(\frac{1}{2x^2}\right) = \text{Arctan}\left(\frac{x}{x+1}\right) - \text{Arctan}\left(\frac{x-1}{x}\right)$$

Première méthode : La fonction $f : x \mapsto \text{Arctan}\left(\frac{1}{2x^2}\right) - \text{Arctan}\left(\frac{x}{x+1}\right) + \text{Arctan}\left(\frac{x-1}{x}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et $\forall x > 0, f'(x) = \frac{\frac{-1}{x^3}}{1 + \frac{1}{4x^4}} - \frac{\frac{1}{(x+1)^2}}{1 + \frac{x^2}{(x+1)^2}} - \frac{\frac{1}{x^2}}{1 + \frac{(x-1)^2}{x}} = 0$;

On en déduit que la fonction f est constante sur $\mathbb{R}_+^*$; $f(1) = 0$ d'où le résultat.

Deuxième méthode : Soit $x > 0$; $\text{Arctan}\left(\frac{1}{2x^2}\right) \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ donc, en appliquant la fonction tan, on a :

$\text{Arctan}\left(\frac{1}{2x^2}\right) = \text{Arctan}\left(\frac{x}{x+1}\right) - \text{Arctan}\left(\frac{x-1}{x}\right) \Rightarrow \frac{1}{2x^2} = \frac{\frac{x}{x+1} - \frac{x-1}{x}}{1 + \frac{x}{x+1} \times \frac{x-1}{x}} \Rightarrow \frac{1}{2x^2} = \frac{1}{2x^2}$

La dernière égalité étant vraie pour tout $x > 0$, on en déduit l'existence d'un entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\text{Arctan}\left(\frac{1}{2x^2}\right) = \text{Arctan}\left(\frac{x}{x+1}\right) - \text{Arctan}\left(\frac{x-1}{x}\right) + k\pi$.

La fonction $x \mapsto \text{Arctan}\left(\frac{1}{2x^2}\right) - \text{Arctan}\left(\frac{x}{x+1}\right) + \text{Arctan}\left(\frac{x-1}{x}\right)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit que l'entier k ne dépend pas du réel $x > 0$. L'égalité pour $x = 1$ donne $k = 0$.

2. En déduire la limite de la suite $(S_n)_{n \geq 1}$ définie par

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \text{Arctan}\left(\frac{1}{2k^2}\right)$$

$\forall n \geq 1, S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\text{Arctan}\left(\frac{k}{k+1}\right) - \text{Arctan}\left(\frac{k-1}{k}\right)\right) \underset{\text{télescopage}}{=} \text{Arctan}\left(\frac{n}{n+1}\right)$;

$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n}{n+1} = 1$ donc par composition, $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \frac{\pi}{4}$.

EXERCICE IV

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. On propose de calculer les sommes : $\quad A_n = \sum_{k=0}^{n} \cos^2(kx) \quad$ et $\quad B_n = \sum_{k=0}^{n} \sin^2(kx)$.

1. Calculer $A_n + B_n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

$A_n + B_n = \sum_{k=0}^{n} (\cos^2(kx) + \sin^2(kx)) = \sum_{k=0}^{n} 1 = n + 1$

2. a. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}, A_n - B_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(2kx)$.

$A_n - B_n = \sum_{k=0}^{n} (\cos^2(kx) - \sin^2(kx)) = \sum_{k=0}^{n} \cos(2kx)$

b. En déduire une expression simplifiée de $A_n - B_n$ en fonction de n (on discutera selon les valeurs de $x \in \mathbb{R}$).

Pour $n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$, on a : $A_n - B_n = \text{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} \left(e^{2ix}\right)^k\right)$

$\leadsto$ Si $x \equiv 0\ [\pi]$, $\quad A_n - B_n = n + 1$

$\leadsto$ Sinon, $\quad A_n - B_n = \text{Re}\left(\frac{1 - e^{2i(n+1)x}}{1 - e^{2ix}}\right) = \text{Re}\left(\frac{-2ie^{(n+1)ix}\sin((n+1)x)}{-2ie^{ix}\sin(x)}\right) = \frac{\cos(nx)\sin((n+1)x)}{\sin(x)}$

3. En déduire une expression simplifiée de A_n et de B_n en fonction de n.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on a : $A_n = \frac{1}{2}((A_n + B_n) + (A_n - B_n))$ et $B_n = \frac{1}{2}((A_n + B_n) - (A_n - B_n))$. D'où :

⇝ Si $x \equiv 0\,[\pi]$, $A_n = n+1$ et $B_n = 0$

⇝ Sinon, $A_n = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\cos(nx)\sin((n+1)x)}{\sin(x)} + n + 1\right)$ et $B_n = \dfrac{1}{2}\left(n+1-\dfrac{\cos(nx)\sin((n+1)x)}{\sin(x)}\right)$

EXERCICE V

On propose de résoudre l'équation suivante d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$z^3 - 6z - 6 = 0 \qquad (\mathscr{E})$$

1. On considère $z \in \mathbb{C}$ une solution de $(\mathscr{E})$. Soient alors $u, v \in \mathbb{C}$ tels que $u+v = z$ et $uv = 2$.

a. Justifier que $(u+v)^3 = 6(u+v)+6$ et montrer que $(u+v)^3 = u^3+v^3+6(u+v)$.
$u+v$ est une solution de $(\mathscr{E})$ donc $(u+v)^3 = 6(u+v)+6$;
Par ailleurs, la formule du binôme de Newton donne : $(u+v)^3 = u^3+3u^2v+3uv^2+v^3 = u^3+v^3+3uv(u+v)$.
Comme $uv = 2$ on a donc $(u+v)^3 = u^3+v^3+6(u+v)$.

b. En déduire u^3+v^3 et déterminer u^3v^3.
Le résultat précédent donne : $6(u+v)+6 = u^3+v^3+6(u+v)$ donc $u^3+v^3 = 6$.
De plus, $uv = 2$ donc $u^3v^3 = 2^3 = 8$.

c. Montrer que u^3 et v^3 sont solutions de l'équation $Z^2 - 6Z + 8 = 0$ d'inconnue $Z \in \mathbb{C}$.
u^3 et v^3 sont solutions de l'équation $Z^2 - (u^3+v^3)Z + u^3v^3 = 0$ ce qui est précisément $Z^2 - 6Z + 8 = 0$.

d. Résoudre l'équation $Z^2 - 6Z + 8 = 0$.
Les solutions sont 2 et 4.

2. a. Résoudre l'équation $W^3 = 2$, d'inconnue $W \in \mathbb{C}$ en exprimant les solutions sous forme trigonométrique.
$W \in \left\{2^{\frac{1}{3}}\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{3}}, k \in [\![0,2]\!]\right\}$.

b. Résoudre l'équation $W^3 = 4$, d'inconnue $W \in \mathbb{C}$ en exprimant les solutions sous forme trigonométrique.
$W \in \left\{4^{\frac{1}{3}}\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{3}}, k \in [\![0,2]\!]\right\}$.

c. A l'aide des questions précédentes, déterminer les valeurs possibles de u et v, puis de z.
D'après ce qui précède, $u^3 = 2, v^3 = 4$ et $uv = 2$; on en déduit que l'on peut avoir :
$u = \sqrt[3]{2}$ et $v = \sqrt[3]{4}$, ou $u = \sqrt[3]{2}\mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $v = \sqrt[3]{4}\mathrm{e}^{\frac{4i\pi}{3}}$ ou $u = \sqrt[3]{2}\mathrm{e}^{\frac{4i\pi}{3}}$ et $v = 4^{\frac{1}{3}}\sqrt[3]{4}\mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}}$ et par suite,
$z = \sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$, ou $z = -\dfrac{1}{2}\left(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}\right) + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}\right)$ ou $z = -\dfrac{1}{2}\left(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}\right) - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}\right)$

d. En déduire les solutions de $(\mathscr{E})$.
On vérifie par le calcul que les trois valeurs déterminées à la question précédente sont bien toutes les trois solutions de $(\mathscr{E})$.
De plus, sachant qu'une équation de degré 3 ne peut admettre plus de 3 solutions, on a bien l'ensemble des solutions de $(\mathscr{E})$.