Math. - CC 3 -

11/03/2024

Toutes les réponses seront justifiées. La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction.

EXERCICE I

Questions préliminaires

1. Démontrer le résultat suivant

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \text{Arctan}\, x + \text{Arctan}\frac{1}{x} = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

2. Justifier que Arctan admet le développement limité en 0 suivant

$$\text{Arctan} x \underset{x \to 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right)$$

Étude d'une fonction

On définit la fonction f sur $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ par

$$f(x) = x\text{Arctan}\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

1. Variations de f

- **a.** Justifier que f est de classe C^∞ sur $\mathscr{D}$ et calculer $f'(x)$.
- **b.** Calculer $f''(x)$. On trouvera une expression de la forme $f''(x) = \dfrac{\alpha x + \beta}{(P(x))^2}$ où P est un polynôme du second degré et α, β deux constantes réelles.
- **c.** Calculer les limites de f' aux bornes de $\mathscr{D}$.
- **d.** Donner un équivalent de f en $+\infty$ et $-\infty$ et préciser les limites de f aux bornes de $\mathscr{D}$.
- **e.** Dresser alors le tableau de variations de la fonction f.

2. Étude autour de $x = 1$

- **a.** Donner une expression de f sur $I_1 =]0;1[$ et sur $I_2 =]1;+\infty[$ à l'aide de la fonction g définie par $g(x) = x\text{Arctan}\left(\dfrac{x-1}{x}\right)$.
- **b.** Calculer le développement limité de g au voisinage de 1 à l'ordre 3.
- **c.** En déduire le développement limité de $f(x)$ au voisinage de 1 à l'ordre 3 lorsque $x \in I_1$ puis le développement limité de $f(x)$ au voisinage de 1 à l'ordre 3 lorsque $x \in I_2$.
- **d.** Quelles informations ces développements limités fournissent-ils pour f ?

3. Représentation graphique

- **a.** Démontrer que

$$f(x) \underset{x \to +\infty}{=} \frac{\pi}{4}x + \frac{1}{2} + \frac{1}{4x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

et

$$f(x) \underset{x \to -\infty}{=} \frac{\pi}{4}x + \frac{1}{2} + \frac{1}{4x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

Quelle interprétation graphique peut-on faire ?

- **b.** Tracer l'allure générale de la courbe de f en exploitant les résultats trouvés.

EXERCICE II

Dans le plan $\mathscr{P}$, on considère un triangle ABC équilatéral direct.

On munit $\mathscr{P}$ du repère orthonormé direct $\mathscr{R} = \left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ où O est le milieu de $[AB]$ et $\overrightarrow{i} = \dfrac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|}$, et on pose $A = (-a, 0)$ et $B = (a, 0)$ dans $\mathbb{R}$ où $a > 0$.

1. Démontrer que les coordonnées cartésiennes de C dans $\mathbb{R}$ sont $\left(0, a\sqrt{3}\right)$.

2. Déterminer une équation cartésienne des droites (AC) et (BC).

3. Montrer que si M est un point intérieur au triangle ABC, la somme des distances de M à chaque côté du triangle ABC est constante.

EXERCICE III

Dans le plan $\mathscr{P}$, on considère deux points distincts A et B.

Soit k un réel strictement positif et soit Γ_k l'ensemble des points M de $\mathscr{P}$ vérifiant $\dfrac{MA}{MB} = k$.

1. Déterminer Γ_1.

2. On suppose désormais $k \neq 1$.

- **a.** Montrer qu'un point M de $\mathscr{P}$ appartient à Γ_k si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MB}$ et $\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB}$ sont orthogonaux.
- **b.** Montrer qu'il existe un unique point I de $\mathscr{P}$ tel que $\overrightarrow{IA} - k\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{0}$ ainsi qu'un unique point J de $\mathscr{P}$ tel que $\overrightarrow{JA} + k\overrightarrow{JB} = \overrightarrow{0}$.
- **c.** Montrer qu'un point M de $\mathscr{P}$ appartient à Γ_k si, et seulement si, $\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MJ} = 0$.
- **d.** Déterminer alors Γ_k.