Math. - CC 3 - Correction

EXERCICE I

Questions préliminaires

1. Démontrer le résultat suivant

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \text{Arctan}\, x + \text{Arctan}\frac{1}{x} = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Soit f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \text{Arctan} x + \text{Arctan}\frac{1}{x}$. f est C^∞ sur $\mathbb{R}^*$ (composition puis somme) et $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = 0$. Par conséquent f est constante sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R}^*$. En particulier,

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \text{Arctan} x + \text{Arctan}\frac{1}{x} = \begin{cases} 2\text{Arctan}(1) = \dfrac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ 2\text{Arctan}(-1) = -\dfrac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

2. Justifier que Arctan admet le développement limité en 0 suivant

$$\text{Arctan} x \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right)$$

Arctan est C^∞ sur $\mathbb{R}$ donc admet en tout point un développement limité à tout ordre. En particulier, Arctan admet un développement limité en 0 d'ordre 3 obtenu par primitivation du développement limité en 0 d'ordre 2 de $(\text{Arctan})'$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $(\text{Arctan})'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} \underset{x\to 0}{=} 1 - x^2 + o\left(x^2\right)$ donc $\text{Arctan}\, x \underset{x\to 0}{=} \text{Arctan}(0) + x - \dfrac{x^3}{3} + o\left(x^3\right)$ d'où :

$$\text{Arctan}\, x \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right)$$

Étude d'une fonction

On définit la fonction f sur $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ par

$$f(x) = x\text{Arctan}\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

1. Variations de f

a. Justifier que f est de classe C^∞ sur $\mathscr{D}$ et calculer $f'(x)$.

$x \mapsto \dfrac{x}{x-1}$ est C^∞ sur $\mathscr{D}$ et Arctan est C^∞ sur $\mathbb{R}$ donc, par composition, $x \mapsto \text{Arctan}\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$ est C^∞ sur $\mathscr{D}$. Enfin, par produit, f est de classe C^∞ sur $\mathscr{D}$.

De plus, $\forall x \in \mathscr{D}$, $f'(x) = \text{Arctan}\left(\dfrac{x}{x-1}\right) - \dfrac{x}{2x^2-2x+1}$.

b. Calculer $f''(x)$. On trouvera une expression de la forme $f''(x) = \dfrac{\alpha x + \beta}{(P(x))^2}$ où P est un polynôme du second degré et α, β deux constantes réelles.

$\forall x \in \mathscr{D}$, $f''(x) = \dfrac{2x-2}{(2x^2-2x+1)^2}$ qui est bien la forme voulue.

c. Calculer les limites de f' aux bornes de $\mathscr{D}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = \dfrac{\pi}{4}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x) = \dfrac{\pi}{4}$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f'(x) = \dfrac{\pi}{2} - 1$ et $\lim\limits_{x\to 1^-} f'(x) = -\dfrac{\pi}{2} - 1$

d. Donner un équivalent de f en $+\infty$ et $-\infty$ et préciser les limites de f aux bornes de $\mathscr{D}$.

$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{4}x$ et $f(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{4}x$.

Puis, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \dfrac{\pi}{2}$ et $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\dfrac{\pi}{2}$.

e. Dresser alors le tableau de variations de la fonction f.
Le signe de $f''(x)$ sur $\mathscr{D}$ est celui de $x-1$ et on peut remarquer que $f'(0)=0$. Ce qui nous permet de dresser le tableau de variations de la fonction f :

x	$-\infty$		0		1	1		$+\infty$
signe de $f''(x)$		-		-	||	||	+	
f'	$\frac{\pi}{4}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{\pi}{2}-1$	$\frac{\pi}{2}-1$	$\nearrow$	$\frac{\pi}{4}$
signe de $f'(x)$		+		-	||	||	+	
f	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

2. <u>Étude autour de $x=1$</u>

a. Donner une expression de f sur $I_1=]0;1[$ et sur $I_2=]1;+\infty[$ à l'aide de la fonction g définie par $g(x)=x\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{x-1}{x}\right)$.
Supposons, $x\in I_1$, alors $\dfrac{x}{x-1}<0$ donc d'après la question préliminaire 1, on obtient

$$\forall x\in I_1,\ f(x)=x\left(-\frac{\pi}{2}-\mathrm{Arctan}\left(\frac{x-1}{x}\right)\right)$$

Supposons, $x\in I_2$, alors $\dfrac{x}{x-1}>0$ donc d'après la question préliminaire 1, on obtient

$$\forall x\in I_2,\ f(x)=x\left(\frac{\pi}{2}-\mathrm{Arctan}\left(\frac{x-1}{x}\right)\right)$$

On peut donc conclure que

$$f(x)=\begin{cases}-\dfrac{\pi}{2}x-g(x) & \text{si } x\in I_1\\ \dfrac{\pi}{2}x-g(x) & \text{si } x\in I_2\end{cases}$$

b. Calculer le développement limité de g au voisinage de 1 à l'ordre 3.
On pose $h=x-1\underset{x\to1}{\longrightarrow}0$. Puis $g(x)=g(1+h)=(1+h)\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{h}{1+h}\right)$.
On a : $\dfrac{h}{1+h}\underset{h\to0}{=}h\left(1-h+h^2+o(h^2)\right)\underset{h\to0}{=}h-h^2+h^3+o(h^3)$.
Enfin, compte tenu de la question préliminaire 2, on obtient :
$(1+h)\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{h}{1+h}\right)\underset{h\to0}{=}(1+h)\mathrm{Arctan}\left(h-h^2+h^3+o(h^3)\right)\underset{h\to0}{=}(1+h)\left(h-h^2+h^3-\dfrac{1}{3}h^3+o(h^3)\right)$
$\underset{h\to0}{=}(1+h)\left(h-h^2+\dfrac{2}{3}h^3+o(h^3)\right)\underset{h\to0}{=}h-\dfrac{1}{3}h^3+o(h^3)$.
On conclut que $g(x)\underset{x\to1}{=}(x-1)-\dfrac{1}{3}(x-1)^3+o\left((x-1)^3\right)$

c. En déduire le développement limité de $f(x)$ au voisinage de 1 à l'ordre 3 lorsque $x\in I_1$ puis le développement limité de $f(x)$ au voisinage de 1 à l'ordre 3 lorsque $x\in I_2$.
Si $x\in I_1$, alors $f(x)=-\dfrac{\pi}{2}x-g(x)\underset{x\to1^-}{=}-\dfrac{\pi}{2}-\left(\dfrac{\pi}{2}+1\right)(x-1)+\dfrac{1}{3}(x-1)^3+o\left((x-1)^3\right)$.
Si $x\in I_2$, alors $f(x)=\dfrac{\pi}{2}x-g(x)\underset{x\to1^+}{=}\dfrac{\pi}{2}+\left(\dfrac{\pi}{2}-1\right)(x-1)+\dfrac{1}{3}(x-1)^3+o\left((x-1)^3\right)$.

d. Quelles informations ces développements limités fournissent-ils pour f ?

Soit f_g la restriction de f à $]-\infty, 1[$. Alors f_g est prolongeable par continuité en 1 en posant $f_g(1) = -\frac{\pi}{2}$; ainsi prolongée, f_g est dérivable en 1 et $f_g'(1) = -\left(\frac{\pi}{2}+1\right)$. On peut conclure que le graphe de f admet une demi-tangente à gauche en 1 d'équation $y = -\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2}+1\right)(x-1)$.

De plus, $f(x) - \left(-\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2}+1\right)(x-1)\right) \underset{x\to 1^-}{\sim} \frac{1}{3}(x-1)^3$ qui est de signe négatif au voisinage de 1 à gauche donc le graphe de f est localement en dessous de sa demi-tangente.

De même, soit f_d la restriction de f à $]1, +\infty[$. Alors f_d est prolongeable par continuité en 1 en posant $f_d(1) = \frac{\pi}{2}$; ainsi prolongée, f_d est dérivable en 1 et $f_d'(1) = \frac{\pi}{2} - 1$. On peut conclure que le graphe de f admet une demi-tangente à droite en 1 d'équation $y = \frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{2}-1\right)(x-1)$.

De plus, $f(x) - \left(\frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{2}-1\right)(x-1)\right) \underset{x\to 1^+}{\sim} \frac{1}{3}(x-1)^3$ qui est de signe positif au voisinage de 1 à droite donc le graphe de f est localement au dessus de sa demi-tangente.

3. Représentation graphique

a. Démontrer que

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{\pi}{4}x + \frac{1}{2} + \frac{1}{4x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

et

$$f(x) \underset{x\to-\infty}{=} \frac{\pi}{4}x + \frac{1}{2} + \frac{1}{4x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

$\forall h \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}, f\left(\frac{1}{h}\right) = \frac{1}{h}\text{Arctan}\left(\frac{1}{1-h}\right)$.

On note $u(h) = \text{Arctan}\left(\frac{1}{1-h}\right)$; u est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ et $\forall h \in \mathbb{R}\setminus\{1\}, u'(h) = \frac{1}{2-2h+h^2}$;

on a $u'(h) \underset{h\to 0}{=} \frac{1}{2}(1+h+o(h))$ donc par primitivation : $u(h) \underset{h\to 0}{=} u(0) + \frac{1}{2}h + \frac{1}{4}h^2 + o(h^2)$, avec $u(0) = \frac{\pi}{4}$.

Finalement, on obtient $f\left(\frac{1}{h}\right) \underset{h\to 0}{=} \frac{1}{h}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}h + \frac{1}{4}h^2 + o(h^2)\right)$, d'où le résultat.

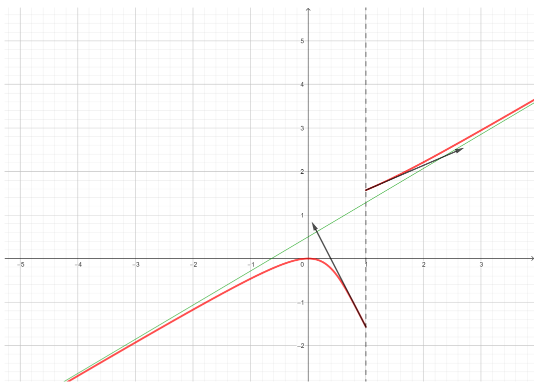
Quelle interprétation graphique peut-on faire ?

La droite d'équation $y = \frac{\pi}{4}x + \frac{1}{2}$ est asymptote au graphe de f aux voisinages de $-\infty$ et $+\infty$.

Par ailleurs, $f(x) - \left(\frac{\pi}{4}x + \frac{1}{2}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4x}$ qui est de signe positif au voisinage de $+\infty$ donc la courbe est localement au dessus de son asymptote au voisinage de $+\infty$.

De même, $f(x) - \left(\frac{\pi}{4}x + \frac{1}{2}\right) \underset{x\to-\infty}{\sim} \frac{1}{4x}$ qui est de signe négatif au voisinage de $-\infty$ donc la courbe est localement en dessous de son asymptote au voisinage de $-\infty$.

b. Tracer l'allure générale de la courbe de f en exploitant les résultats trouvés.



EXERCICE II

Dans le plan $\mathscr{P}$, on considère un triangle ABC équilatéral direct.

On munit $\mathscr{P}$ du repère orthonormé direct $\mathscr{R} = \left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ où O est le milieu de $[AB]$ et $\vec{i} = \dfrac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|}$, et on pose $A = (-a, 0)$ et $B = (a, 0)$ dans $\mathbb{R}$ où $a > 0$.

1. Démontrer que les coordonnées cartésiennes de C dans $\mathbb{R}$ sont $\left(0, a\sqrt{3}\right)$.

Dans un triangle équilatéral, les médianes sont aussi des hauteurs donc $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC} = 0$.
De plus, le triangle ABC étant direct, $\det\left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\right) > 0$. Ceci se traduit par $x_C = 0$ et $y_C > 0$.
Enfin, d'après le théorème de Pythagore, $y_C = OC = \sqrt{BC^2 - OB^2} = a\sqrt{3}$.
Finalement, dans $\mathscr{R}$, $C\left(0; a\sqrt{3}\right)$.

2. Déterminer une équation cartésienne des droites (AC) et (BC).

$M(x, y) \in (AC) \Longleftrightarrow \det\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AC}\right) = 0 \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} x+a & a \\ y & a\sqrt{3} \end{vmatrix} = 0$ et ainsi $(AC)\ :\ a\sqrt{3}(x+a) - ay = 0$.

$M(x, y) \in (BC) \Longleftrightarrow \det\left(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BC}\right) = 0 \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} x-a & -a \\ y & a\sqrt{3} \end{vmatrix} = 0$ et ainsi $(BC)\ :\ a\sqrt{3}(x-a) + ay = 0$.

3. Montrer que si M est un point intérieur au triangle ABC, la somme des distances de M à chaque côté du triangle ABC est constante.

Soit $M(x, y)$ un point un point intérieur au triangle ABC. Alors

$$\begin{aligned}
d(M,(BC)) + d(M,(AC)) + d(M,(AB)) &= \frac{\left|\det\left(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BC}\right)\right|}{BC} + \frac{\left|\det\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AC}\right)\right|}{AC} + \frac{\left|\det\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}\right)\right|}{AB} \\
&= \frac{-\det\left(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BC}\right)}{BC} + \frac{\det\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AC}\right)}{AC} + \frac{-\det\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}\right)}{AB} \\
&= \frac{-a\sqrt{3}(x-a) - ay}{2a} + \frac{a\sqrt{3}(x+a) - ay}{2a} + \frac{2ay}{2a} \\
&= a\sqrt{3}
\end{aligned}$$

En deuxième ligne, on exploite le fait que M est intérieur à ABC et que ABC est direct.

EXERCICE III

Dans le plan $\mathscr{P}$, on considère deux points distincts A et B.

Soit k un réel strictement positif et soit Γ_k l'ensemble des points M de $\mathscr{P}$ vérifiant $\dfrac{MA}{MB} = k$.

1. Déterminer Γ_1.

Γ_1 est la médiatrice de $[AB]$.

2. On suppose désormais $k \neq 1$.

a. Montrer qu'un point M de $\mathscr{P}$ appartient à Γ_k si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MB}$ et $\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB}$ sont orthogonaux.

$\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MB}$ et $\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB}$ sont orthogonaux, si et seulement si, $\left(\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MB}\right).\left(\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB}\right) = 0$ et

$$\begin{aligned}
\left(\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MB}\right).\left(\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB}\right) = 0 &\Longleftrightarrow \overrightarrow{MA}^2 - k^2\overrightarrow{MB}^2 = 0 \\
&\Longleftrightarrow \overrightarrow{MA}^2 = k^2\overrightarrow{MB}^2 \\
&\Longleftrightarrow MA^2 = k^2 MB^2 \\
&\Longleftrightarrow MA = kMB \\
&\Longleftrightarrow \frac{MA}{MB} = k
\end{aligned}$$

b. Montrer qu'il existe un unique point I de $\mathscr{P}$ tel que $\overrightarrow{IA} - k\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{0}$ ainsi qu'un unique point J de $\mathscr{P}$ tel que $\overrightarrow{JA} + k\overrightarrow{JB} = \overrightarrow{0}$.

$\overrightarrow{IA} - k\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{0} \iff \overrightarrow{AI} = \dfrac{k}{k-1}\overrightarrow{AB}$; I est l'image de B par l'homothétie de centre A et de rapport $\dfrac{k}{k-1}$ et ainsi il existe un unique point I de $\mathscr{P}$ tel que $\overrightarrow{IA} - k\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{0}$.

De même, J est l'image de B par l'homothétie de centre A et de rapport $\dfrac{-k}{1+k}$.

Par ailleurs, $I \neq J$ puisque, pour $k > 0$ et $k \neq 1$, $\dfrac{k}{k-1} \neq \dfrac{-k}{1+k}$.

c. Montrer qu'un point M de $\mathscr{P}$ appartient à Γ_k si, et seulement si, $\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MJ} = 0$.

$$\begin{aligned}
\left(\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MB}\right).\left(\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB}\right) = 0 &\iff \left(\overrightarrow{MI} - k\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} - k\overrightarrow{IB}\right).\left(\overrightarrow{MJ} + k\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JA} + k\overrightarrow{JB}\right) = 0 \\
&\iff \left((1-k)\overrightarrow{MI}\right).\left((1+k)\overrightarrow{MJ}\right) = 0 \\
&\iff \overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MJ} = 0
\end{aligned}$$

d. Déterminer alors Γ_k.

Puisque $I \neq J$, Γ_k est le cercle de diamètre $[IJ]$.