

Initiation aux Probabilités

Application en Fiabilité

Chapitre I

Calcul d'une probabilité

1 Introduction

L'histoire des probabilités commence avec Pascal, Fermat, Leibnitz : «J'ai dit plus d'une fois qu'il faudrait une nouvelle espèce de logique, qui traiterait des degrés de probabilité» (dans «Les nouveaux essais de l'entendement humain», 1704). Les travaux sont poursuivis par De Moivre et Bernoulli : «La probabilité est en effet un degré de la certitude et en diffère comme la partie diffère du tout» (dans "Ars Conjectandi", 1713). En 1812, dans son «Essai philosophique sur les probabilités», Laplace pose les premières pierres de la théorie: «Premier principe : la probabilité est le rapport du nombre des cas favorables à celui de tous les cas possibles. Deuxième principe : mais cela suppose les divers cas également possibles. S'ils ne le sont pas, on déterminera d'abord leurs possibilités respectives dont la juste appréciation est un des points les plus délicats de la théorie des hasards. Alors la probabilité sera la somme des possibilités de chaque cas favorable.»

Supposons :

- qu'on lance un dé (non truqué),
- qu'on extraie une boule d'une urne dans laquelle ces boules sont indiscernables,
- qu'on examine la marque d'une voiture au hasard à un péage,
- qu'on lance une roue de loterie et que l'on guette le numéro sortant,
- qu'on attende un enfant sans savoir si c'est un garçon ou une fille ...

Toutes ces expériences sont dites aléatoires (du latin *alea* : le dé, puis le jeu de dés -rappelez-vous la célèbre formule «*alea jacta est*»-) car leur résultat ne peut être prévu : il dépend du hasard (mot venant de l'arabe et signifiant : jeu de dés).

2 Comparaison ensemble - probabilité

Le vocabulaire des probabilités diffère de celui des ensembles. Le tableau I.1, page suivante, nous montre les différences de vocabulaire.

Théorie des ensembles	Théorie des probabilités
Ω	
ensemble des résultats possibles	univers
$A \subset \Omega$	
sous-ensemble, partie	événement
$\text{Card}A = 1$	
singleton	événement élémentaire
$A = \emptyset$	
ensemble vide	événement impossible
$A = \Omega$	
	événement certain
$A \cap B$	
A inter B	A et B
$A \cup B$	
A union B	A ou B
$A \subset B$	
A inclus dans B	A implique B
$A \cap B = \emptyset$	
A et B disjoints	A et B incompatibles
$\overline{A} = A^c$	
complémentaire de A	contraire de A

TAB. I.1 - Ensemble vs Probabilités

Exemple 1 Soit $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$, $A = \{2; 4; 6\}$ et $B = \{1; 2; 3\}$. On a :

- $A \cap B = \{2\}$: c'est un événement élémentaire,
- $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 6\}$,
- $A^c = \{1; 3; 5\}$.

3 Probabilités

Le calcul des probabilités nous amène à travailler parfois sur une suite dénombrable d'événements. C'est la raison pour laquelle la définition d'une probabilité fait intervenir une suite dénombrable.

Définition 1 Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire. On appelle *probabilité* sur Ω toute application $\text{IP} : \Omega \rightarrow [0;1]$ telle que :

1. $\text{IP}(\Omega) = 1$,
2. Pour toute suite (A_n) d'événements deux à deux incompatibles de Ω , on a :

$$\text{IP}\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum_n \text{IP}(A_n)$$

Proposition 1 On en déduit que si A et B sont incompatibles alors :

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$$

Remarque 1 La proposition reste vraie pour une suite finie d'événements incompatibles.

Conséquence 1 On en déduit que :

1. $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$ donc $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$,
2. $A \subset B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$,
3. $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

Remarque 2 On appelle *système complet d'événements* une suite $\{A_i\}_{i=1,\dots,n}$ d'événements telle que :

- $i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$,
- $\bigcup_{k=1}^n A_k = \Omega$.

Exemple 2 Soit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ un univers de dimension fini. Posons $p_i = \mathbb{P}(\omega_i)$. On a alors :

- $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, p_i \geq 0$,
- $\sum_{i=1}^n p_i = 1$.

4 Probabilité uniforme ou équiprobabilité dans un univers fini

Exemple 3 On jette un dé équilibré : chacune des 6 faces a la même probabilité d'apparaître, soit $\frac{1}{6}$.

Définition 2 Soit Ω un univers fini (cf. exemple 2). On note $p_i = \mathbb{P}(\omega_i)$. On dit qu'il y a *équiprobabilité* si :

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1; n \rrbracket, p_i = p_j .$$

On obtient alors que $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, p_i = \frac{1}{n}$. On dit alors qu'on est en présence d'une *probabilité uniforme* sur Ω .

Propriété 1 Soient Ω un univers fini et une probabilité uniforme sur Ω . Soit A un événement de Ω . La probabilité de A vaut :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

ATTENTION : cette formule n'est valable que dans l'hypothèse d'équiprobabilité qu'il convient de vérifier soigneusement. De plus, le calcul dans le cas d'équiprobabilité nécessite souvent d'avoir recours aux dénombrements.

Exemple 4 On jette deux dés et on cherche la probabilité de l'événement A « la somme des points obtenus vaut 6 ». On peut être tenté de dire: il y a 11 sommes possibles, qui sont 2, 3, ..., 12 donc la probabilité que la somme vaille 6 est 1/11. ET NON!! car ces événements ne sont pas équiprobables.

L'univers correspondant à l'expérience est $\Omega = \{(a; b) \text{ où } a \in \llbracket 1; 6 \rrbracket, b \in \llbracket 1; 6 \rrbracket\}$. On peut donc voir que $\text{card}(\Omega) = 6 \times 6 = 36$.

Chacun des couples (a; b) ayant la même chance d'apparaître, nous avons affaire à l'équiprobabilité.

L'événement A est la réunion des événements élémentaires : (1; 5), (2; 4), (3; 3), (4; 2), (5; 1).

On a donc
$$\text{IP}(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{5}{36}.$$

Remarque 3 On fait souvent des calculs de probabilités en considérant une population dans laquelle on prélève un individu «au hasard» et on examine s'il possède ou non telle caractéristique. Dans ce cas, la probabilité considérée est la probabilité uniforme et la formule ci-dessus s'applique.

5 Conditionnement et indépendance

5.1 Probabilité conditionnelle

Exemple 5 Un paquet de 8 cartes est composé de 4 as (As ♠; As ♥; As ♦ et As ♣) et de 4 rois (Roi ♠; Roi ♥; Roi ♦ et Roi ♣). On tire deux cartes au hasard (sans remise). Calculons la probabilité que ces deux cartes soient des as. L'univers associé à cette expérience aléatoire est $\Omega = \{(a; b) \text{ où } a \text{ et } b \in \{\text{As } \spadesuit; \text{As } \heartsuit; \text{As } \diamondsuit; \text{As } \clubsuit; \text{Roi } \spadesuit; \text{Roi } \heartsuit; \text{Roi } \diamondsuit; \text{Roi } \clubsuit\}\}$.

On peut donc lister l'ensemble des duos possibles :

As ♠-As ♥	As ♥-As ♦	As ♦-As ♣	As ♣-Roi ♠	Roi ♠-Roi ♥	Roi ♥-Roi ♦	Roi ♦-Roi ♣
As ♠-As ♦	As ♥-As ♣	As ♦-Roi ♠	As ♣-Roi ♥	Roi ♠-Roi ♦	Roi ♥-Roi ♣	
As ♠-As ♣	As ♥-Roi ♠	As ♦-Roi ♥	As ♣-Roi ♦	Roi ♠-Roi ♣		
As ♠-Roi ♠	As ♥-Roi ♥	As ♦-Roi ♦	As ♣-Roi ♣			
As ♠-Roi ♥	As ♥-Roi ♦	As ♦-Roi ♣				
As ♠-Roi ♦	As ♥-Roi ♣					
As ♠-Roi ♣						

Les duos d'as apparaissent sur fond bleu. Comme il y a équiprobabilité des couples, nous avons:

$$\text{IP}(2 \text{ as}) = \frac{\text{nombre de paires d'as}}{\text{nombre total de paires}} = \frac{6}{28} = \frac{3}{14}$$

Supposons maintenant qu'une des deux cartes soit un as. L'ensemble des possibilités a donc changé. Le tableau suivant liste les nouvelles possibilités :

As♠-As♥	As♥-As♦	As♦-As♣	As♣-Roi♠			
As♠-As♦	As♥-As♣	As♦-Roi♠	As♣-Roi♥			
As♠-As♣	As♥-Roi♠	As♦-Roi♥	As♣-Roi♦			
As♠-Roi♠	As♥-Roi♥	As♦-Roi♦	As♣-Roi♣			
As♠-Roi♥	As♥-Roi♦	As♦-Roi♣				
As♠-Roi♦	As♥-Roi♣					
As♠-Roi♣						

Ici aussi, les duos d'as apparaissent sur fond bleu. Nous avons :

$$\text{IP}(2 \text{ as sachant qu'une des deux est un as}) = \frac{\text{nombre de paires d'as}}{\text{nombre total de paires possibles}} = \frac{6}{22} = \frac{3}{11}$$

En fait, lorsqu'on dispose d'une information sur la nature du résultat, cette information modifie le nombre de cas favorables et le nombre de cas possibles.

Les probabilités conditionnelles apparaissent en particulier lorsqu'on est en présence d'expériences successives et dépendantes. Ici, le tirage de la seconde carte dépend de manière évidente du tirage de la première (on ne peut pas tirer l'as de pique au second tirage si on l'a tiré au premier ...): on est donc en présence d'expériences successives dépendantes.

Définition 3 Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire muni d'une probabilité IP et B un événement de Ω de probabilité non nulle. On appelle *probabilité conditionnelle* sachant que B est réalisé, la probabilité p_B définie par :

$$p_B : \Omega \rightarrow [0;1]$$

$$A \mapsto p_B(A) = \frac{\text{IP}(A \cap B)}{\text{IP}(B)}$$

Proposition 2 La quantité p_B est une probabilité sur le nouvel univers B .

Notation : on note souvent cette probabilité de la façon suivante : $p_B(A) = \text{IP}(A / B)$ et on lit «probabilité de A sachant B ».

5.2 Indépendance

Exemple 6 On jette deux fois une pièce de monnaie équilibrée (c'est-à-dire que la probabilité d'obtenir pile est de $\frac{1}{2}$) et on regarde les deux résultats. L'univers associé à cette expérience aléatoire est $\Omega = \{PP, PF, FP, FF\}$ de cardinal 4. Soient les événements suivants : A "le premier lancer donne pile", B "le deuxième lancer donne pile", C "deux jets consécutifs donnent pile". On peut montrer que :

$$A = (PP) \cup (PF) ; B = (FP) \cup (PP) ; C = (PP)$$

et donc par équiprobabilité, on a :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{P}(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{P}(C) = \frac{1}{4}$$

On sait que les lancers sont indépendants, c'est-à-dire que le résultat du second lancer ne dépend pas du résultat du premier. De plus, ici $C = A \cap B$, on peut alors constater d'après ce qui précède que $\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$.

Définition 4 Soient A et B deux événements d'un univers Ω muni d'une probabilité \mathbb{P} . On dit que A et B sont *indépendants* si on a :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) .$$

Remarque 4 Lorsque A et B sont indépendants et que leurs probabilités sont non nulles, on a l'égalité suivante $\mathbb{P}(A / B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(A)$. Cela veut dire que la réalisation de B ne modifie pas la probabilité de A (intuitivement cela correspond bien à ce qu'on entend par "indépendance"). On peut voir aussi que $\mathbb{P}(B / A) = \mathbb{P}(B)$ et donc que la réalisation de A ne modifie pas la probabilité de B .

Proposition 3 Si A et B sont indépendants, alors A et B^c sont indépendants (donc aussi B et A^c par symétrie) et A^c et B^c sont indépendants.

5.3 Conséquence : diverses formules

Généralisation de la formule du conditionnement : soient A_1, \dots, A_n n événements tels que

$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n-1} A_k\right) \neq 0$, on a le résultat suivant :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right) = \mathbb{P}(A_1) \mathbb{P}(A_2 / A_1) \mathbb{P}(A_3 / A_1 \cap A_2) \dots \mathbb{P}\left(A_n / \bigcap_{k=1}^{n-1} A_k\right)$$

Soit $(A_k)_{k=1, \dots, n}$ un système complet d'événements. On suppose de plus que pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ $\mathbb{P}(A_k) > 0$. On a alors les deux résultats suivants :

- (i) Propriété des probabilités totales : soit B un événement de Ω , on a

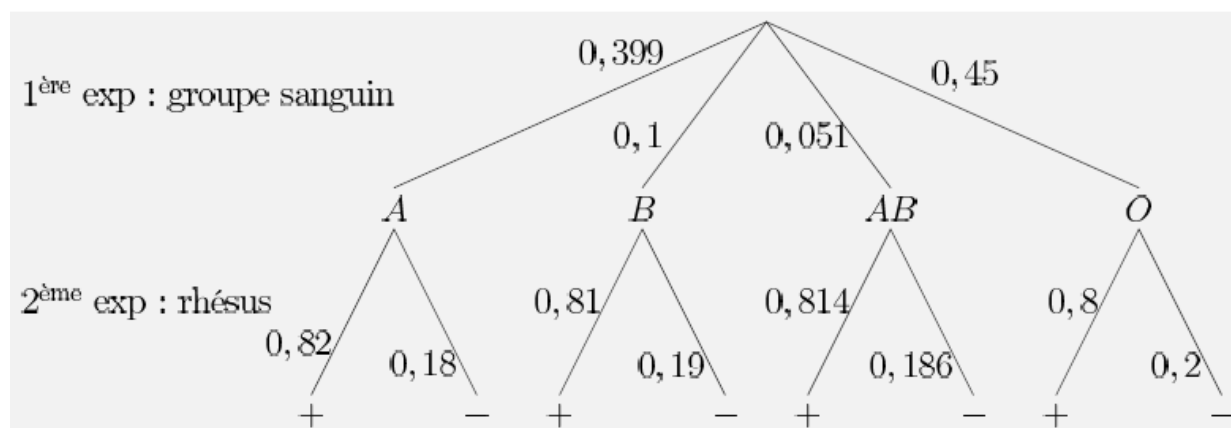
$$IP(B) = \sum_{k=1}^n IP(B / A_k) IP(A_k)$$

(ii) Formule de Bayes : on suppose $IP(B) \neq 0$. On a alors :

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad IP(A_k / B) = \frac{IP(B / A_k) IP(A_k)}{\sum_{j=1}^n IP(B / A_j) IP(A_j)}$$

5.4 Technique pour utiliser un arbre de probabilité

Exemple 7 Pour illustrer la théorie, nous allons reprendre un exemple que nous allons voir en TD (sur les groupes sanguins). Nous supposons que l'arbre est déjà construit (nous le ferons en TD). Le voici :



Pour bien comprendre l'utilisation des arbres, deux formules sont importantes: la propriété des probabilités totales et la généralisation de la formule du conditionnement. En effet, pour calculer la probabilité de la deuxième expérience, il faut :

- 1) rajouter tous les résultats de la première expérience par la première formule.

Exemple 8

$$\begin{aligned} IP(\text{rhésus } +) &= IP(\text{rhésus } + \cap \text{ groupe } A) \\ &\quad + IP(\text{rhésus } + \cap \text{ groupe } B) \\ &\quad + IP(\text{rhésus } + \cap \text{ groupe } AB) \\ &\quad + IP(\text{rhésus } + \cap \text{ groupe } O) \end{aligned}$$

- 2) puis conditionner par la deuxième formule, car ce qui est donné par les hypothèses, ce sont les probabilités de la première expérience et les probabilités de la deuxième expérience sachant la première, ...

Exemple 9

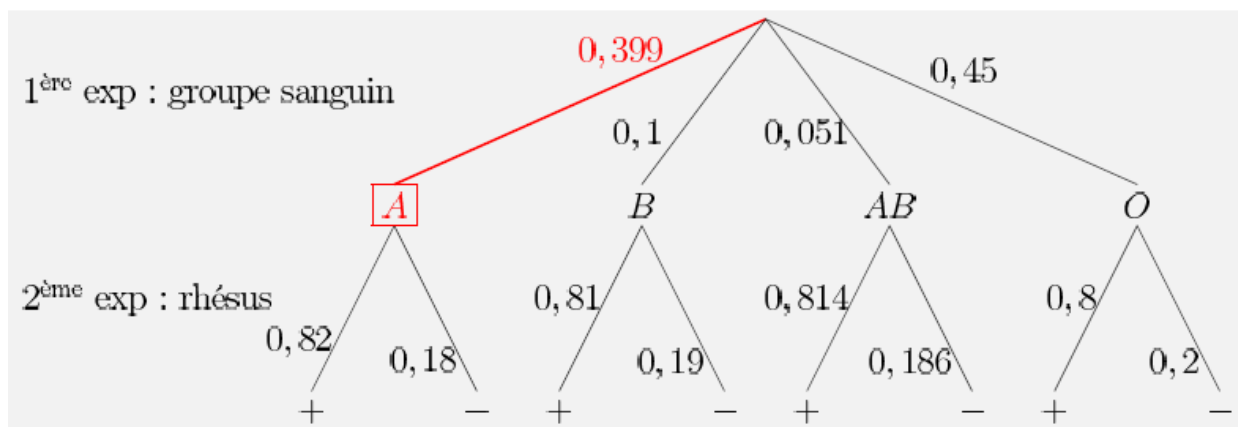
$$\begin{aligned} \text{IP}(\text{rhésus } +) &= \text{IP}(\text{groupe } A) \cdot \text{IP}(\text{rhésus } + / \text{ groupe } A) \\ &+ \text{IP}(\text{groupe } B) \cdot \text{IP}(\text{rhésus } + / \text{ groupe } B) \\ &+ \text{IP}(\text{groupe } AB) \cdot \text{IP}(\text{rhésus } + / \text{ groupe } AB) \\ &+ \text{IP}(\text{groupe } O) \cdot \text{IP}(\text{rhésus } + / \text{ groupe } O) \end{aligned}$$

Et ces 8 probabilités sont connues.

Maintenant que vous connaissez la théorie, voyons comment on peut accélérer le calcul d'un événement en utilisant l'arbre.

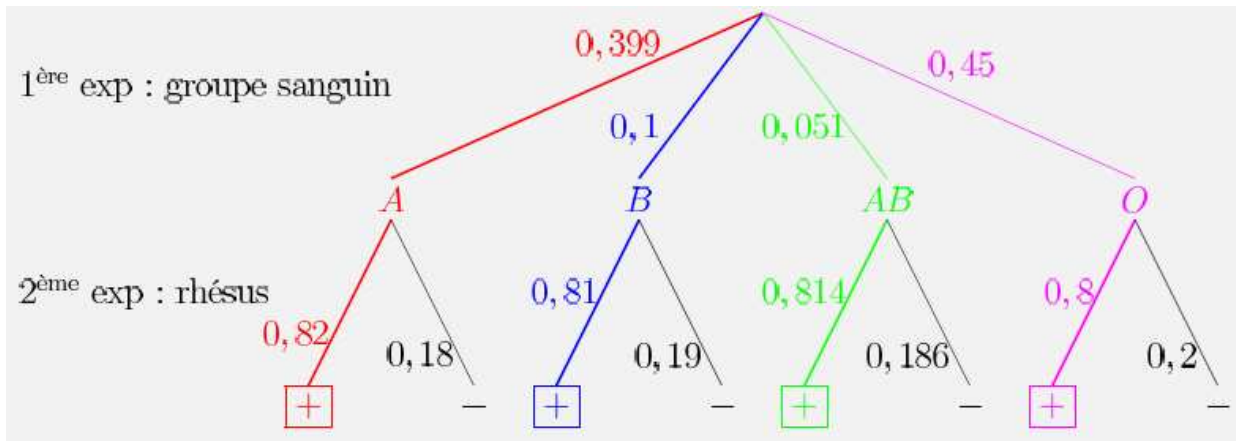
Lorsque l'on veut calculer une probabilité appartenant à la $n^{\text{ième}}$ expérience, il faut trouver toutes les branches où celui-ci se trouve et remonter jusqu'à la racine. S'il y a plusieurs chemins, on les ajoute (première formule) et pour chaque chemin, on multiplie les valeurs trouvées sur son passage (deuxième formule).

Exemple 10 Calculons la probabilité qu'une personne soit de groupe A. La démarche est la suivante : "groupe A" vient de la première expérience. Il est seul et on remonte jusqu'à la racine. Sur le graphe, cela donne :



On a donc : $\text{IP}(\text{groupe } A) = 0,399$.

Exemple 11 Calculons la probabilité qu'une personne soit rhésus positif. La démarche est la même que pour l'exemple précédent : "rhésus +" vient de la deuxième expérience. Il y en a 4 (cela correspond aux 4 couleurs du graphe). Sur le graphe, cela donne :

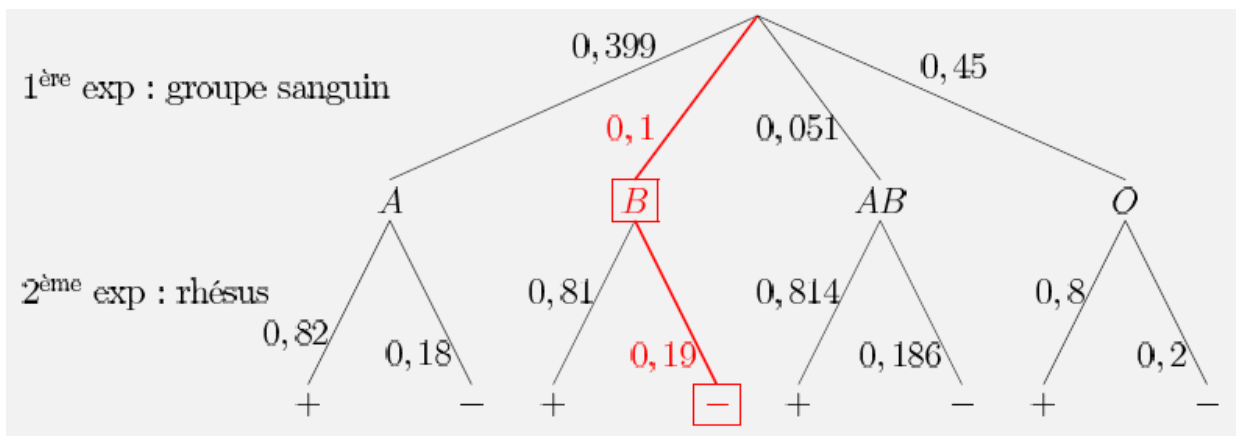


On a donc : $IP(\text{rhésus } +) = 0,82 \cdot 0,399 + 0,81 \cdot 0,1 + 0,814 \cdot 0,051 + 0,8 \cdot 0,45$.

Pour refaire le lien avec la théorie, il faut voir que 0,82 correspond à la probabilité qu'on soit rhésus + sachant qu'on est du groupe A; 0,399 est la probabilité qu'on soit du groupe A.

Et donc $0,82 \cdot 0,399$ correspond à la probabilité qu'on soit du groupe A **et** qu'on soit rhésus +.

Pour terminer l'exemple à deux expériences, calculons $IP(\text{rhésus } - \cap \text{ groupe } B)$. Il n'y a qu'un seul chemin. Sur le graphe, cela donne :



On a donc : $IP(\text{rhésus } - \cap \text{ groupe } B) = 0,19 \cdot 0,1$.

Pour trois expériences successives, cela se passe exactement de la même manière, mais les calculs sont encore plus longs!!

Chapitre II

Variabes aléatoires réelles

1 Introduction

Exemple 12 Un joueur jette deux dés et gagne en euros la somme des points obtenus si elle est paire; il perd cette somme si elle est impaire.

L'univers correspondant à cette expérience est $\Omega = \{(a; b) \text{ où } a \in \llbracket 1; 6 \rrbracket; b \in \llbracket 1; 6 \rrbracket\}$ de cardinal 36 sur lequel on peut faire l'hypothèse d'équiprobabilité.

Modélisons la situation en construisant une application X de la manière suivante :

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(a; b) \mapsto \begin{cases} a+b & \text{si } a+b \text{ est paire} \\ -(a+b) & \text{si } a+b \text{ est impaire} \end{cases}$$

Par exemple, $X(1; 3) = 4$ (le joueur gagne 4 euros) et $X(3; 4) = (-7)$ (le joueur perd 7 euros).

A chaque événement de Ω , on associe un réel : cette application s'appelle une variable aléatoire. De plus, on peut voir que pour calculer la probabilité que $X = 2$, il faut en fait compter le nombre d'événements élémentaires dont la somme fait 2. Cela revient à se replacer dans l'univers Ω .

Définition 5 Soit Ω un univers muni d'une probabilité \mathbb{IP} . Une variable aléatoire réelle (V.A.R.) est une application $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ qui permet de définir une nouvelle probabilité \mathcal{Q}_X sur \mathbb{R} , appelée *probabilité image* de \mathbb{IP} par X ou *loi de X* .

Cette nouvelle probabilité est entièrement déterminée par l'équation suivante :

$$\mathcal{Q}_X (]-\infty; t]) = \mathbb{IP} (X^{-1} (]-\infty; t])).$$

Remarque 5 On parle de V.A.R. discrète lorsque $X(\Omega)$ est un ensemble fini ou dénombrable de \mathbb{R} et on parle de V.A.R. continue dans le cas contraire, c'est-à-dire lorsque $X(\Omega)$ est un ensemble infini non dénombrable de \mathbb{R} .

Propriété 2 Soient X et Y deux V.A.R. définies sur un même univers Ω et λ un réel. On a les propriétés suivantes :

1. λX est une V.A.R.,
2. $X + Y$ est une V.A.R.,
3. $X \cdot Y$ est une V.A.R.

Définition 6 Soit X une V.A.R. On appelle *fonction de répartition* de X l'application

$$F: \mathbb{R} \rightarrow [0;1]$$

$$t \mapsto F(t) = Q_X (]-\infty; t[)$$

Par abus de notation, on posera $Q_X (]-\infty; t[) = \text{IP}(X < t)$.

Propriété 3 Toute fonction de répartition F d'une variable aléatoire vérifie :

1. $t \leq t' \Rightarrow F(t) \leq F(t')$,
2. F est continue à gauche,
3. $\lim_{t \rightarrow -\infty} F(t) = 0$; $\lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) = 1$,
4. $\text{IP}(X \in [a, b[) = F(b) - F(a)$,
5. $\text{IP}(X = x_0) = F(x_0^+) - F(x_0^-)$.

Suite de l'exemple 12

Pour déterminer la loi de X , il faut passer par plusieurs étapes.

La première étape est de déterminer l'ensemble des valeurs que prend la V.A.R. X .

Ici, X prend les valeurs 2, -3, 4, -5, 6, ..., -11, 12. En général, cet ensemble sera noté I_X .

La seconde étape consiste à déterminer la probabilité Q_X .

Ici (cas discret), cela revient à calculer la probabilité que $\{X = k\}$ pour $k \in I_X$.

Posons D_1 le résultat du premier dé et D_2 le résultat du second. On a :

$$\{X = 2\} = \{D_1 = 1\} \cap \{D_2 = 1\}$$

$$\Rightarrow \text{IP}(X = 2) = \text{IP}(D_1 = 1) \times \text{IP}(D_2 = 1) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

De même, on montre que :

$$\{X = -3\} = (\{D_1 = 2\} \cap \{D_2 = 1\}) \cup (\{D_1 = 1\} \cap \{D_2 = 2\})$$

$$\Rightarrow \text{IP}(X = -3) = \text{IP}(D_1 = 1) \times \text{IP}(D_2 = 2) + \text{IP}(D_1 = 2) \times \text{IP}(D_2 = 1)$$

$$\Rightarrow \text{IP}(X = -3) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

Définition 7 Deux V.A.R. X et Y sont dites *indépendantes* si :

$$\forall (A ; B) \in I_X \times I_Y, \quad \text{IP}(\{X \in A\} \cap \{Y \in B\}) = \text{IP}(X \in A) \times \text{IP}(Y \in B)$$

2 V.A.R. discrètes

2.1 Espérance et variance

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser plus particulièrement aux V.A.R. discrètes. Nous avons vu que pour une V.A.R. discrète X , l'univers image de Ω par X est un ensemble fini ou dénombrable de \mathbb{R} . Soit $\{x_1, x_2, \dots\}$ les valeurs de cet ensemble.

Pour déterminer la loi de X , nous avons vu qu'il faut calculer les probabilités aux points $\{x_1, x_2, \dots\}$, c'est-à-dire les quantités $\mathbb{P}(X = x_i)$.

Définition 8 Soit une V.A.R. discrète X à valeurs dans x_1, x_2, \dots , on appelle *espérance* (ou *moyenne*) de X le réel :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{+\infty} x_i \mathbb{P}(X = x_i)$$

Propriété 4 Soient X et Y deux V.A.R., a et b deux réels. On a les propriétés suivantes :

1. $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$,
2. $\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$,
3. $\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i)$.

On peut donc constater que l'espérance est linéaire.

Exemple 13 Reprenons l'exemple 12, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) = & 2 \cdot \frac{1}{36} + (-3) \cdot \frac{2}{36} + 4 \cdot \frac{3}{36} + (-5) \cdot \frac{4}{36} + 6 \cdot \frac{5}{36} + (-7) \cdot \frac{6}{36} + 8 \cdot \frac{5}{36} \\ & + (-9) \cdot \frac{4}{36} + 10 \cdot \frac{3}{36} + (-11) \cdot \frac{2}{36} + 12 \cdot \frac{1}{36} = 0 \end{aligned}$$

L'espérance représente ici le gain moyen du joueur. Dans ce cas, le jeu est d'espérance nulle : on dit qu'il est équilibré. On dit aussi que la V.A.R. X est *centrée*.

Remarque 6 Pour toute variable aléatoire X , la variable aléatoire $X - \mathbb{E}(X)$ est une variable aléatoire centrée (c'est-à-dire que sa moyenne est nulle).

Pour décrire une distribution (ou loi de probabilité) l'espérance mathématique ne constitue qu'une première étape rudimentaire. Ainsi, si on considère les notes de 3 groupes de TD de 20 élèves dans une école d'ingénieurs :

- tous les élèves du premier groupe ont 10,
- la moitié du second groupe a 20, tandis que l'autre moitié a 0,
- enfin, les notes du troisième groupe sont : 0, 1, 2, ..., 9, 11, 12, ..., 20.

Dans les 3 groupes, la moyenne est égale à 10, pourtant les 3 situations décrites sont bien différentes. Pour rendre compte de ce phénomène, on définit un autre paramètre qu'on appelle la variance.

Définition 9 Soit une V.A.R. discrète X à valeurs dans x_1, x_2, \dots

- On appelle *variance* de X le réel :

$$\text{Var}(X) = \text{IE} \left([X - \text{IE}(X)]^2 \right) = \sum_{i=1}^{+\infty} [x_i - \text{IE}(X)]^2 \text{IP}(X = x_i)$$

Cette dernière permet d'apprécier la dispersion des résultats en mesurant la moyenne des carrés des écarts.

- Pour des raisons d'homogénéité (quand X s'exprime dans une certaine unité), on définit l'*écart-type*. Celui-ci est la racine carrée de la variance et est généralement noté :

$$\sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}$$

Propriété 5 Soit X une V.A.R., on a les propriétés suivantes :

1. $\text{Var}(X) \geq 0$,
2. Formule de Koëning-Huyghens :

$$\text{Var}(X) = \text{IE}(X^2) - [\text{IE}(X)]^2,$$

3. soient a et b deux réels, $\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X)$,
4. soit Y une autre V.A.R. discrète. Si X et Y sont indépendantes, alors :

$$\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y).$$

Remarques 7

- Dans les carnets de santé des enfants, les courbes de taille et de poids sont représentées par une ligne continue encadrée de deux lignes en pointillé. C'est ce qu'on appelle intervalle de confiance. Ces intervalles sont calculés en fonction de la moyenne et de l'écart-type.
- Pour toute variable aléatoire X , la variable aléatoire $\frac{X - \text{IE}(X)}{\sigma(X)}$ a pour espérance 0 et pour écart-type 1. On dit alors que la V.A.R. X est centrée réduite.

2.2 Lois discrètes usuelles

2.2.1 Loi uniforme discrète

Exemple 14 On jette un dé à n faces (si, si, ça existe ...). X représente les points obtenus.

Définition 10 On dit qu'une variable aléatoire X suit une *loi uniforme* sur $\{1, \dots, n\}$ si elle prend comme valeurs les entiers $1, 2, \dots, n$ avec la probabilité $\frac{1}{n}$. On a donc :

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \text{IP}[X = k] = \frac{1}{n}$$

Propriété 6 Pour une V.A.R. X suivant une loi uniforme sur $\{1, \dots, n\}$, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \frac{n+1}{2}, \\ \text{Var}(X) &= \frac{n^2-1}{12}\end{aligned}$$

2.2.2 Loi de Bernoulli

Exemple 15 Une production d'emballages de produits pharmaceutiques teste à la fin de la chaîne la qualité de l'emballage. Après ce test, on choisit de garder ou non l'emballage (soit l'emballage est bon, soit il est défectueux). X représente le résultat du test sur un emballage.

Définition 11

On dit qu'une variable aléatoire X suit une *loi de Bernoulli* si elle ne prend que deux valeurs 1 (**succès** : bon emballage) ou 0 (**échec** : emballage défectueux) avec les probabilités respectives p et $1 - p = q$. On a donc :

$$\mathbb{P}[X = 1] = p = 1 - \mathbb{P}[X = 0].$$

Remarque 8 Toute expérience qui peut donner comme résultat uniquement deux valeurs: pile ou face, la naissance d'un enfant (fille ou garçon), le contrôle de qualité d'une production (pièce bonne ou défectueuse) peut être modélisée par une V.A.R. de Bernoulli.

Propriété 7 Pour une V.A.R. X suivant une loi de Bernoulli de paramètre p , on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= p, \\ \text{Var}(X) &= pq\end{aligned}$$

2.2.3 Loi binomiale $B(n, p)$

Exemple 16 Supposons que l'on répète n fois, de manière indépendante, une expérience de Bernoulli de paramètre p . On s'intéresse à la variable aléatoire X représentant le nombre de succès au cours des n épreuves. X prend les valeurs $0, 1, 2, \dots, n$.

Calculons les probabilités que $\{X = k\}$ pour $k = 0, 1, 2, \dots, n$.

En fait, $X = k$ correspond à un n -uplet comportant k succès et $n - k$ échecs.

De plus, nous savons qu'il y a C_n^k façons de constituer un tel n -uplet. Comme les expériences de Bernoulli sont indépendantes, la probabilité d'obtenir un tel n -uplet est de $p^k q^{n-k}$.

Nous obtenons donc $\mathbb{P}(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$. Vérifions que c'est bien une probabilité :

$$\sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^n C_n^k p^k q^{n-k} = (p + q)^n = 1^n = 1$$

Définition 12 On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètre (n, p) si on a :

$$\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, \quad \mathbb{P}[X = k] = C_n^k p^k q^{n-k}$$

On la note $B(n, p)$.

Remarque 9 On a vu qu'une V.A.R. binomiale peut être considérée comme le nombre de succès dans n expériences de Bernoulli indépendantes et identiquement distribuées (c'est-à-dire de même loi; et donc, ici, de même paramètre p). En associant à la $i^{\text{ème}}$ expérience une V.A.R.

de Bernoulli Y_i , on voit que $X = \sum_{i=1}^n Y_i$. C'est-à-dire qu'une V.A.R. binomiale $B(n, p)$ est la somme de n V.A.R. de Bernoulli indépendantes et identiquement distribuées.

Propriété 8 Pour une V.A.R. X suivant une loi binomiale $B(n, p)$, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= np, \\ \text{Var}(X) &= npq \end{aligned}$$

2.2.4 Loi de Poisson

Exemple 17 Cette loi est souvent utilisée pour modéliser :

- le nombre de pièces défectueuses dans un lot donné,
- le nombre d'appels téléphoniques à un standard,
- les apparitions de pannes dans un ensemble de machines,
- le nombre de clients attendant à un guichet.

Définition 13 On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi de Poisson de paramètre λ si on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}[X = k] = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

On la note $P(\lambda)$.

Propriété 9 Pour une V.A.R. X suivant une loi de Poisson de paramètre λ , on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \lambda, \\ \text{Var}(X) &= \lambda \end{aligned}$$

2.2.5 Loi géométrique

Exemple 18 On répète autant de fois que nécessaire de manière indépendante une épreuve de Bernoulli de paramètre p jusqu'à obtenir un succès. X est la variable aléatoire «rang du premier succès». X prend toutes les valeurs entières naturelles non nulles.

Calculons les probabilités que $\{X = k\}$ pour $k = 1, 2, \dots$

Si le succès arrive au rang k , cela veut dire que nous devons avoir $k - 1$ échecs, puis le succès.

La probabilité d'avoir $k - 1$ échecs est q^{k-1} et la probabilité d'avoir le succès est p .

Nous obtenons donc $\mathbb{P}(X = k) = q^{k-1}p$. Vérifions que c'est bien une probabilité :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} q^{k-1}p = p \frac{1}{1-q} = 1$$

Définition 14 On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi géométrique de paramètre (p) si on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* , \mathbb{P}[X = k] = q^{k-1}p$$

Propriété 10 Pour une V.A.R. X suivant une loi géométrique p , on a :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p},$$

$$\text{Var}(X) = \frac{q}{p^2}$$

2.2.6 Loi de Pascal

Exemple 19 On répète autant de fois que nécessaire de manière indépendante une épreuve géométrique jusqu'à obtenir r succès. X représente le nombre de tirages nécessaires. X peut prendre les valeurs entières de r à $+\infty$ (il faut tester au moins r emballages pour que r emballages soient bons, mais on peut aussi ne jamais avoir de bon emballage! L'entreprise aurait alors de sérieux problèmes de machines...)

Définition 15 On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi de Pascal de paramètre (r, p) si on a :

$$\forall k \in \mathbb{N} \cap [r; +\infty[, \mathbb{P}[X = k] = C_{k-1}^{r-1} p^r q^{k-r}$$

On parle aussi de loi binomiale négative et on la note $BN(r, p)$.

Remarques 10

1. Une V.A.R. de Pascal est la somme de r V.A.R. géométriques identiques et indépendantes.
2. Si $r = 1$, on reconnaît la loi géométrique de paramètre p .

Propriété 11 Pour une V.A.R. X suivant une loi de Pascal (r, p) , on a :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{r}{p},$$

$$\text{Var}(X) = \frac{rq}{p^2}$$

Nous venons de voir les principales lois discrètes. Pour la suite, il est important de savoir reconnaître rapidement ces lois dans un problème concret.

3 V.A.R. continues

3.1 Espérance et variance

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser plus particulièrement aux V.A.R. continues. Nous avons vu que pour une V.A.R. continue X , l'univers image de Ω par X est un ensemble infini non dénombrable de \mathbb{R} .

Nous avons déjà vu la définition d'une fonction de répartition au début de ce chapitre :

$$F(t) = \mathbb{P}(X < t) = Q_X(-\infty; t[).$$

Remarque 11 Une V.A.R. est continue si et seulement si sa fonction de répartition est continue, c'est à dire s'il n'existe aucun $x \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbb{P}(X = x) \neq 0$.

Définition 16

- On dit que X (ou plus exactement la loi de X) est *absolument continue* s'il existe $f_X \geq 0$ telle que pour tout événement A , on ait :

$$\mathbb{P}[X \in A] = \int_A f_X(x) dx$$

- En particulier, $\int_{\mathbb{R}} f_X(x) dx = 1$. Dans ce cas, la fonction f_X est la *densité* de probabilité de X .

- On appelle *espérance* (ou *moyenne*) de X le réel :

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x) dx$$

- On appelle *variance* de X le réel :

$$\text{Var}(X) = \int_{\mathbb{R}} (x - \mathbb{E}(X))^2 f_X(x) dx$$

Remarque 12 Soient X et Y deux V.A.R. continues, a et b deux réels. On a encore les propriétés suivantes :

1. $\text{IE}(X + Y) = \text{IE}(X) + \text{IE}(Y)$
2. $\text{IE}(aX + b) = a\text{IE}(X) + b$
3. $\text{IE}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \text{IE}(X_i)$
4. $\text{Var}(X) = \text{IE}(X^2) - [\text{IE}(X)]^2$
5. $\text{Var}(aX + b) = a^2\text{Var}(X)$,
6. Si X et Y sont indépendantes, alors : $\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$.

Proposition 4 (changement de variable dans le cas continu)

Si la V.A.R. X admet une densité f_X et si g est une application bijective, alors la V.A.R.

$Y = g(X)$ a pour densité :

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \cdot \left| (g^{-1})'(y) \right|$$

Il existe un lien direct entre la densité et la fonction de répartition (lorsque l'une des deux existe) :

Proposition 5

1. Soit f_X la densité d'une V.A.R. X . La fonction de répartition de X est déduite par la formule suivante :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt$$

2. Soit F_X la fonction de répartition de X . La densité de X est déduite par la formule suivante :

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

Nous avons également les caractérisations suivantes :

Proposition 6 Soit f une fonction. Si f vérifie les hypothèses suivantes :

1. $f \geq 0$,
2. f est continue sauf en un nombre fini de points x_1, x_2, \dots, x_n
3. f admet aux points x_i une limite à gauche (finie ou égale à $+\infty$) et une limite à droite (finie ou égal à $+\infty$),
4. l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ converge et vaut 1,

alors il existe une V.A.R. X telle que la densité de X est la fonction f .

Proposition 7 Soit F une fonction. Si F vérifie les hypothèses suivantes :

1. F est une fonction croissante sur \mathbb{R}
2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$
3. F est continue et de classe C^1 sur \mathbb{R} sauf en un nombre fini de points x_1, x_2, \dots, x_n
4. F' admet aux points x_i une limite à gauche (finie ou égale à $+\infty$) et une limite à droite (finie ou égale à $+\infty$),
alors il existe une V.A.R. X telle que la fonction de répartition de X est la fonction F

Pour déterminer la loi d'une V.A.R. continue, il faut donner l'ensemble de définition de cette V.A.R., puis soit donner sa densité, soit sa fonction de répartition. Nous allons donc donner pour chaque loi l'ensemble de définition ainsi que la densité associée.

3.2 Lois continues usuelles

3.2.1 Loi uniforme

Exemple 20 Pour un observateur non synchronisé, la phase d'un signal sinusoïdal issu d'un générateur peut être modélisée par une variable aléatoire réelle continue uniformément répartie sur un intervalle de longueur 2π .

Définition 17

On dit qu'une variable aléatoire X suit une *loi uniforme* sur $[a; b]$ si sa densité est égale à :

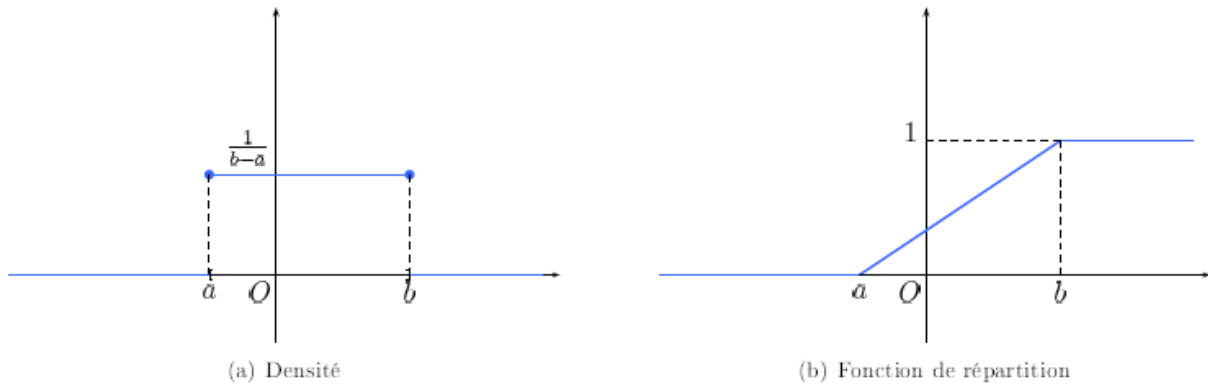
$$\begin{aligned} \forall x \in [a; b], \quad f_X(x) &= \frac{1}{b-a} \\ \forall x \notin [a; b], \quad f_X(x) &= 0 \end{aligned}$$

Remarque 13 On emploie souvent la fonction "*indicatrice*", notée $\mathbb{1}$, pour donner directement avec la densité l'ensemble de définition de la V.A.R. Ici, on obtient :

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a; b]}(x).$$

Avec cette densité on peut calculer la fonction de répartition d'une loi uniforme sur $[a; b]$.
On a :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{si } b \leq x \end{cases}$$

FIG. II.1 - Loi uniforme sur $[a; b]$.

Propriété 12 Pour une V.A.R. X suivant une loi uniforme sur $[a; b]$, on a :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2}$$

$$\text{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

3.2.2 Loi exponentielle

Exemple 21 Avec cette loi, on modélise, en général, la durée de vie d'un matériel technique ou le rayonnement d'une particule radioactive.

Définition 18 On dit qu'une variable aléatoire X suit une *loi exponentielle* de paramètre λ si sa densité est égale à :

$$\forall x \geq 0, f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

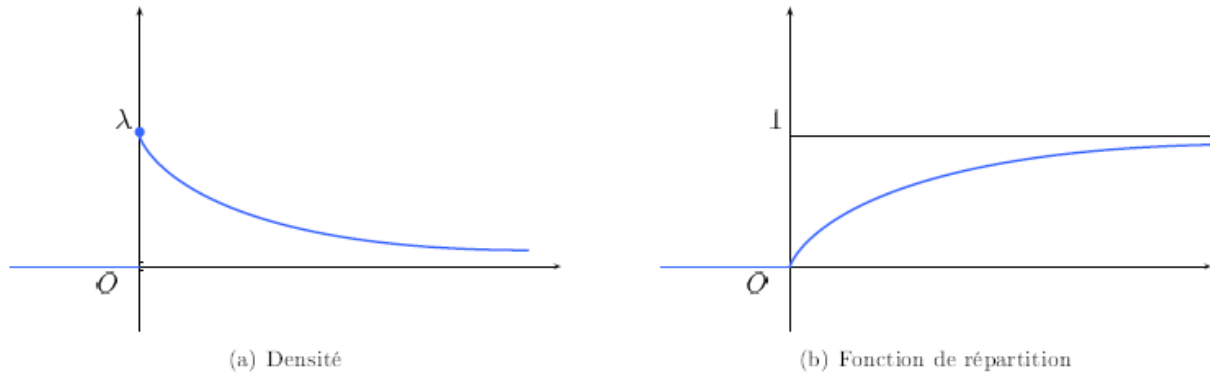
$$\forall x < 0, f_X(x) = 0$$

i.e. $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x)$.

Remarque 14 Avec cette densité on peut calculer la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre λ .

On a :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } 0 \leq x \end{cases}$$

FIG. II.2 - Loi exponentielle de paramètre λ .

Propriété 13 Pour une V.A.R. X suivant une loi exponentielle de paramètre λ , on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \frac{1}{\lambda} \\ \text{Var}(X) &= \frac{1}{\lambda^2}\end{aligned}$$

3.2.3 Loi normale ou loi Gaussienne

Exemple 22 C'est une des lois les plus utilisées en statistiques. Elle possède de très bonnes propriétés. Notamment, le théorème de la limite centrale que nous verrons au prochain chapitre, nous dit que pour une suite de V.A.R. indépendantes et identiquement distribuées où la moyenne et la variance sont finies, la somme centrée réduite tend vers une loi normale centrée réduite. On comprend alors l'importance que prend la loi normale, puisqu'elle va intervenir pratiquement partout ...

Définition 19 On dit qu'une variable aléatoire X suit une *loi normale* de paramètre (μ, σ^2) si sa densité est égale à :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

On la note $N(\mu, \sigma^2)$.

Remarque 15 Pour la loi normale, il est impossible de donner une forme explicite de la fonction de répartition. En effet, il faudrait calculer l'intégrale suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$$

ce qui revient à calculer une intégrale de la forme $\int_{-\infty}^x e^{-t^2} dt$. Or on ne connaît pas de primitive de cette fonction.

Lorsqu'on ne peut pas calculer de manière explicite la fonction de répartition, on la calcule de manière numérique. Pour cela on considère la V.A.R. $Y = \frac{X - \mu}{\sigma}$, qui suit une loi normale centrée réduite $((\mu; \sigma^2) = (0; 1))$, et on utilise ce que l'on appelle des tables de loi.

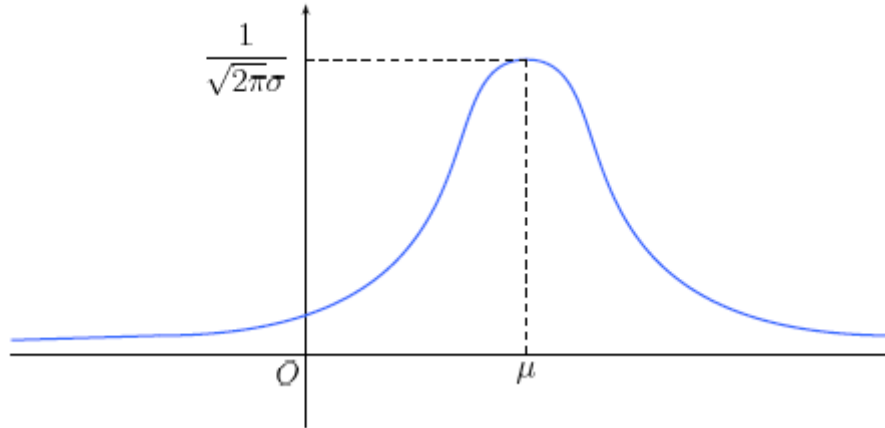


FIG. II.3 - Densité de la loi normale de paramètre (μ, σ^2) .

Propriété 14 Pour une V.A.R. X suivant une loi normale de paramètres (μ, σ^2) , on a :

$$\begin{aligned} \text{IE}(X) &= \mu \\ \text{Var}(X) &= \sigma^2 \end{aligned}$$

3.2.4 Loi de Cauchy

Exemple 23 Cette loi sert souvent de contre-exemple car elle n'a aucun moment, c'est-à-dire que l'espérance de toutes puissances de X est infinie. A fortiori, il n'existe pas de moyenne (moment d'ordre 1) et pas de variance (moment centré d'ordre 2).

Définition 20 On dit qu'une variable aléatoire X suit une *loi de Cauchy* si sa densité est égale à :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_x(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$$

Nous venons de voir les principales lois continues. Comme pour les lois discrètes, il est important de savoir reconnaître rapidement ces lois dans un problème concret. Les deux tableaux en annexe récapitulent les principales lois discrètes et continues que vous pourriez rencontrer dans la pratique.

Chapitre III

Vecteur aléatoire réel

Nous avons vu les principales lois discrètes et continues dans le cas univarié (c'est-à-dire lorsqu'on ne manipule qu'une seule V.A.R.).

Dans ce chapitre, nous allons manipuler plusieurs V.A.R., calculer la dépendance entre deux V.A.R. et faire des changements de V.A.R. Les manipulations se feront soit avec deux lois discrètes soit avec deux lois continues, *mais pas* avec une loi discrète et une loi continue.

1 Couple de variables aléatoires réelles

Dans cette partie, nous allons nous intéresser à un couple de V.A.R. et non plus à une seule V.A.R. Nous allons voir comment définir un couple de V.A.R. (densité bivariée,...). En fait, nous allons généraliser la plupart des résultats vus dans le cas univarié.

Toutes les définitions données ici peuvent être généralisées au cas d'un vecteur à n composantes (et non plus deux, comme nous allons voir) sans trop de difficultés.

1.1 Définitions

Définition 21 Soit Ω un univers muni d'une probabilité IP.

Un couple de variables aléatoires réelles (ou vecteur aléatoire réel de dimension 2) est une application $(X, Y) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ qui permet de définir une nouvelle probabilité $Q_{X,Y}$ sur \mathbb{R}^2 , appelée *probabilité image* de IP par (X, Y) .

Cette nouvelle probabilité est entièrement déterminée par l'équation suivante :

$$Q_{X,Y} (]-\infty; t_1[\times]-\infty; t_2]) = \text{IP} (X^{-1} (]-\infty; t_1]) \cap Y^{-1} (]-\infty; t_2])).$$

Comme pour le cas univarié, on peut alors définir la fonction de répartition bivariée.

Définition 22 Soit (X, Y) un vecteur aléatoire réel. On appelle *fonction de répartition* de (X, Y) l'application :

$$F : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow [0;1] \\ (t_1, t_2) \mapsto F(t_1, t_2) = Q_{X,Y} (]-\infty; t_1[\times]-\infty; t_2[) \end{cases}$$

Propriété 15 Toute fonction de répartition F d'un vecteur aléatoire vérifie :

1. $0 \leq F \leq 1$.
2. Si pour tout $i \in \{1; 2\}$, $t_i \leq t'_i$ alors $F(t_1, t_2) \leq F(t'_1, t'_2)$
3. F est continue à gauche en chacune de ses variables.
4. S'il existe $i \in \{1; 2\}$ tel que $t_i \rightarrow -\infty$, alors $F(t_1, t_2) \rightarrow 0$.
Si pour tout $i \in \{1; 2\}$, $t_i \rightarrow +\infty$, alors $F(t_1, t_2) \rightarrow 1$

Définition 23 (Cas discret) La loi du couple (X, Y) est définie par les probabilités suivantes :

$$\forall (j, k) \in I_{(X, Y)}, \quad \mathbb{P}[X = x_j, Y = y_k] = p_{jk}$$

où $I_{(X, Y)}$ est un ensemble fini ou dénombrable et $\sum_{(j, k) \in I_{(X, Y)}} p_{jk} = 1$.

Définition 24 (Cas continu) La loi du couple (X, Y) est définie par la densité suivante (lorsque la fonction de répartition est définie) :

$$f(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F(x, y)$$

1.2 Lois marginales et indépendance

Lorsqu'on connaît la loi du couple (X, Y) , on peut calculer la loi de X et celle de Y , c'est ce qu'on appelle les lois marginales.

Pour calculer la loi de X (resp. la loi de Y), on va sommer sur toutes les valeurs que prend Y (resp. les valeurs que prend X). On passe alors de la loi du couple (une loi bivariée) à une loi univariée, c'est-à-dire que la connaissance de la loi de (X, Y) nous fournit la connaissance des lois de X et de Y . La réciproque n'est pas vraie car il nous manque l'information sur le lien qui unit ces deux lois.

Nous avons vu dans le chapitre précédent la notion d'indépendance de V.A.R.

Ce qui définit les V.A.R. X et Y , ce sont les lois marginales. On dira donc que deux V.A.R. X et Y sont indépendantes si la loi du couple (X, Y) est le produit des lois marginales de X et de Y .

Mais avant cela, il faut savoir calculer les lois marginales à partir de la loi du couple.

Définition 25 (Cas discret) Les lois marginales de X et de Y sont définies par :

- loi marginale de X : $p_{j\bullet} = \sum_k p_{jk}$,
- loi marginale de Y : $p_{\bullet k} = \sum_j p_{jk}$.

Il est facile de vérifier que $p_{j\bullet}$ et $p_{\bullet k}$ définissent bien deux probabilités. De plus, on a d'après notre définition : X et Y sont deux V.A.R. indépendantes si et seulement si $p_{jk} = p_{j\bullet} \cdot p_{\bullet k}$.

Cette notion d'indépendance rejoint la notion déjà vue puisque l'égalité précédente est équivalente à :

$$\mathbb{P}[X = x_j, Y = y_k] = \mathbb{P}[X = x_j] \cdot \mathbb{P}[Y = y_k]$$

Définition 26 (Cas continu) Les lois marginales de X et de Y sont définies par :

- loi marginale de X : $f_X(x) = \int_{I_Y} f_{X,Y}(x, y) dy$,
- loi marginale de Y : $f_Y(y) = \int_{I_X} f_{X,Y}(x, y) dx$.

où I_Y (resp. I_X) est l'ensemble des valeurs que prend la V.A.R. Y (resp. X).

Là aussi, il est facile de vérifier que f_X et f_Y sont deux densités. De plus, on a d'après notre définition : X et Y sont deux V.A.R. indépendantes si et seulement si $f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$.

2 Moments d'un couple

Définition 27 Soit (X, Y) un couple de V.A.R. et Φ une fonction. On appelle *espérance* de $\Phi(X, Y)$ la quantité suivante :

$$\mathbb{E}[\Phi(X, Y)] = \sum_{(j,k) \in I_{(X,Y)}} \Phi(x_j, y_k) p_{jk} \quad \text{dans le cas discret}$$

$$\mathbb{E}[\Phi(X, Y)] = \iint_{I_{(X,Y)}} \Phi(x, y) f_{X,Y}(x, y) dx dy \quad \text{dans le cas continu}$$

On peut alors définir plusieurs quantités, notamment la corrélation qui est une des mesures de dépendance les plus utilisées.

Définition 28 Le *moment* d'ordre (j, k) est défini par :

$$m_{j,k} = \mathbb{E}[X^j Y^k].$$

En particulier, $\mathbb{E}(X) = m_{1,0}$ et $\mathbb{E}(Y) = m_{0,1}$.

Le *moment centré* d'ordre (j, k) est défini par :

$$\mu_{j,k} = \mathbb{E}\left[\left(X - m_{1,0}\right)^j \left(Y - m_{0,1}\right)^k\right].$$

En particulier, $\text{Var}(X) = \mu_{2,0}$ et $\text{Var}(Y) = \mu_{0,2}$.

Définition 29 La *covariance* entre X et Y est la quantité $\mu_{1,1}$ c'est-à-dire :

$$\text{Cov}(X, Y) = \text{IE}[(X - m_{1,0})(Y - m_{0,1})] = \text{IE}(XY) - \text{IE}(X).\text{IE}(Y).$$

On définit alors la *corrélation* par :

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}}$$

Proposition 8 Si X et Y sont deux V.A.R. indépendantes alors $\text{Cov}(X, Y) = 0$.

3 Changements de variables bivariés

Soit g une application de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 . On pose $g(X, Y) = (U, V)$.

Cas discret :
$$\text{IP}((U, V) = (u_m, v_m)) = \sum_{(j,k)/g(x_j, y_k) = (u_m, v_m)} \text{IP}((X, Y) = (x_j, y_k))$$

Remarque 16 Si la fonction g est bijective, alors il n'existe qu'un seul point (x_j, y_k) tel que $g(x_j, y_k) = (u_m, v_m)$ et donc on a :

$$\text{IP}((U, V) = (u_m, v_m)) = \text{IP}((X, Y) = (x_j, y_k)).$$

Cas continu :

Soit (X, Y) , un vecteur aléatoire de \mathbb{R}^2 admettant la densité $f_{X,Y}(x, y) \mathbb{1}_D(x, y)$ où D est un ouvert de \mathbb{R}^2 . On suppose que l'application g est bijective et que $g(D) = \Delta$. On a alors le changement de variable suivant :

$$\begin{aligned} D &\xrightarrow{g} \Delta \\ (X, Y) &\mapsto (U, V) = (g_1(X, Y), g_2(X, Y)) \end{aligned}$$

La transformation inverse est donnée par :

$$\begin{aligned} \Delta &\xrightarrow{g^{-1}} D \\ (U, V) &\mapsto (X, Y) = ((g^{-1})_1(U, V), (g^{-1})_2(U, V)) \end{aligned}$$

Alors le vecteur $g(X, Y)$ admet la densité définie par :

$$f_{U,V}(u, v) = f_{X,Y}(g^{-1}(u, v)) \left| J_{g^{-1}}(u, v) \right| \mathbb{1}_{\Delta}(u, v)$$

où $\left| J_{g^{-1}}(u, v) \right|$ représente la valeur absolue de $J_{g^{-1}}(u, v)$, qui est le déterminant, supposé non nul en tout point, de la matrice jacobienne :

$$J_{g^{-1}}(u, v) = \det \left(\text{Jac} \left[g^{-1}(u, v) \right] \right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial (g^{-1})_1}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial (g^{-1})_1}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial (g^{-1})_2}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial (g^{-1})_2}{\partial v}(u, v) \end{vmatrix}$$

4 Convergence en loi et théorème limite centrale

Soit F_n (respectivement F) la fonction de répartition de X_n (respectivement X).

Définition 30 On dit que (X_n) converge en loi vers X si et seulement si :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(t) = F(t) \quad \text{en tout point } t \in \mathbb{R} \text{ où } F \text{ est continue.}$$

Théorème Limite centrale

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de V.A.R. indépendantes, de même loi, de moyenne m et de variance σ^2

Alors on a :

$$\frac{X_1 + \dots + X_n - n.m}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{loi}} N(0,1)$$

Remarque 17 Ce théorème justifie l'importance accordée à la loi normale. En effet, dès qu'une V.A.R. X pourra être considérée comme la somme de n V.A.R. indépendantes et identiquement distribuées, alors on pourra appliquer le résultat précédent et approcher X par une loi gaussienne. On verra dans le prochain module que ce sera le cas pour nos statistiques de test.

Exemple 24 Toute V.A.R. X qui suit une loi binomiale $B(n, p)$ peut être considérée comme la somme de n variables de Bernoulli.

D'après le théorème précédent, on a alors le résultat suivant : $\frac{X - n.p}{\sqrt{npq}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{loi}} N(0,1)$

Pour n assez grand, on peut donc approcher une loi binomiale par une loi gaussienne.

Chapitre IV

Application en fiabilité

1 Fiabilité d'un élément

1.1 Schéma général

Un élément passe par plusieurs phases au cours de son utilisation :

- Mean Time To Failure (MTTF) : durée moyenne de bon fonctionnement avant la première défaillance,
- Mean Down Time (MDT) : durée moyenne d'indisponibilité (détection et réparation de la panne, remise en service),
- Mean Up Time (MUT) : durée moyenne de bon fonctionnement après réparation,
- Mean Time Between Failure (MTBF) : durée moyenne entre deux défaillances consécutives.

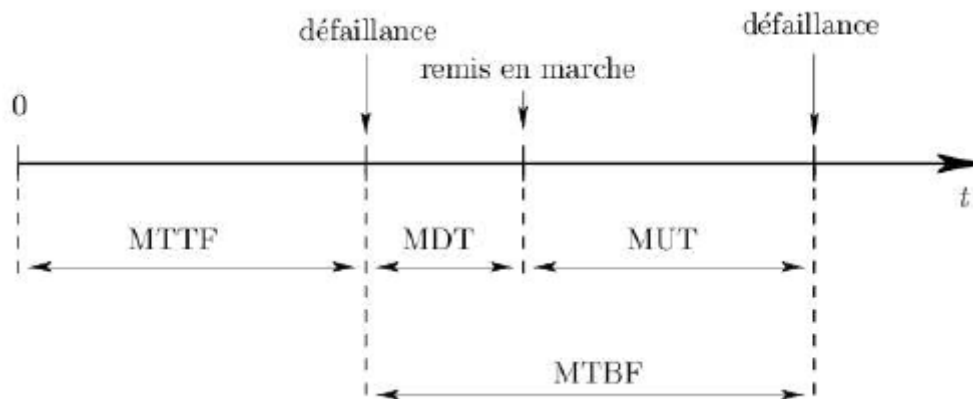


FIG. IV.1 - Schéma général de la fiabilité d'un élément

Dans la pratique, la MDT est faible par rapport à la MUT et donc on considère souvent que $MUT \approx MTBF$.

Définition 31 Soit T la durée de bon fonctionnement de l'élément. On appelle *fiabilité* (en anglais, *reliability*) à l'instant t , la probabilité qu'il n'y ait pas de défaillance avant l'instant t , c'est-à-dire :

$$R(t) = \text{IP}(T > t)$$

Remarques 18

1. On a $R(0) = 1$ et $R(+\infty) = 0$. Autrement dit, l'élément n'a subi aucune défaillance avant d'être utilisé! L'autre égalité nous dit que l'élément n'est pas immortel !
2. On appelle *défiabilité* la quantité $F(t) = 1 - R(t)$, qui est aussi la fonction de répartition.

Proposition 9 Soit T la durée de bon fonctionnement, on a : $\text{MTTF} = \text{IE}(T)$.

Proposition 10 Si $\lim_{t \rightarrow +\infty} t R(t) = 0$, alors : $\text{MTTF} = \int_0^{+\infty} R(t) dt$.

1.2 Élément non réparable

Dans le cas d'un élément non réparable, il n'y a ni MDT, ni MUT, ni MTBF. On ne calcule donc que le MTTF.

1.3 Élément réparable

Deux cas sont à envisager.

- Soit on remplace l'élément par un élément neuf: en supposant le MDT proche de 0, on a $\text{MTBF} \approx \text{MTTF}$.
- Soit on répare l'élément, mais il ne repart pas de 0.

Définition 32 On définit le MTBF par :

$$\text{MTBF} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \text{IE}(M_n)$$

où M_n est le temps de bon fonctionnement de la $n^{\text{ième}}$ période.

Proposition 11 Si M_n est stationnaire, alors $\text{MTBF} = \text{MTTF}$.

1.4 Taux de défaillance

Définition 33 Le *taux de défaillance moyen* sur l'intervalle de temps $[t; t + \Delta t]$ est la probabilité d'avoir une défaillance entre t et $t + \Delta t$, sachant qu'il n'y a pas eu de défaillance avant t , divisé par Δt . Autrement dit :

$$\lambda(t; t + \Delta t) = \frac{1}{\Delta t} \text{IP}(t \leq T \leq t + \Delta t \mid T > t)$$

Définition 34 On définit le *taux de défaillance instantané* par :

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \lambda(t; t + \Delta t)$$

Proposition 12 On a les égalités suivantes :

1. $\lambda(t) = -\frac{R'(t)}{R(t)}$.
2. $R(t) = e^{-\int_0^t \lambda(u) du}$.
3. $F(t) = 1 - e^{-\int_0^t \lambda(u) du} = 1 - R(t)$.

Dans la pratique, le taux de défaillance d'un élément passe par plusieurs phases, qui correspondent à la vie de cet élément :

- le rodage : les pannes sont dues essentiellement à des défauts de fabrication ou de conception (par exemple, on change une ampoule et celle-ci claque dès qu'on allume la lumière),
- la vie utile : les pannes sont dues au hasard,
- le vieillissement : les pannes sont dues à l'usure croissante de l'élément.

Ces trois phases sont respectivement décroissante, constante et croissante :

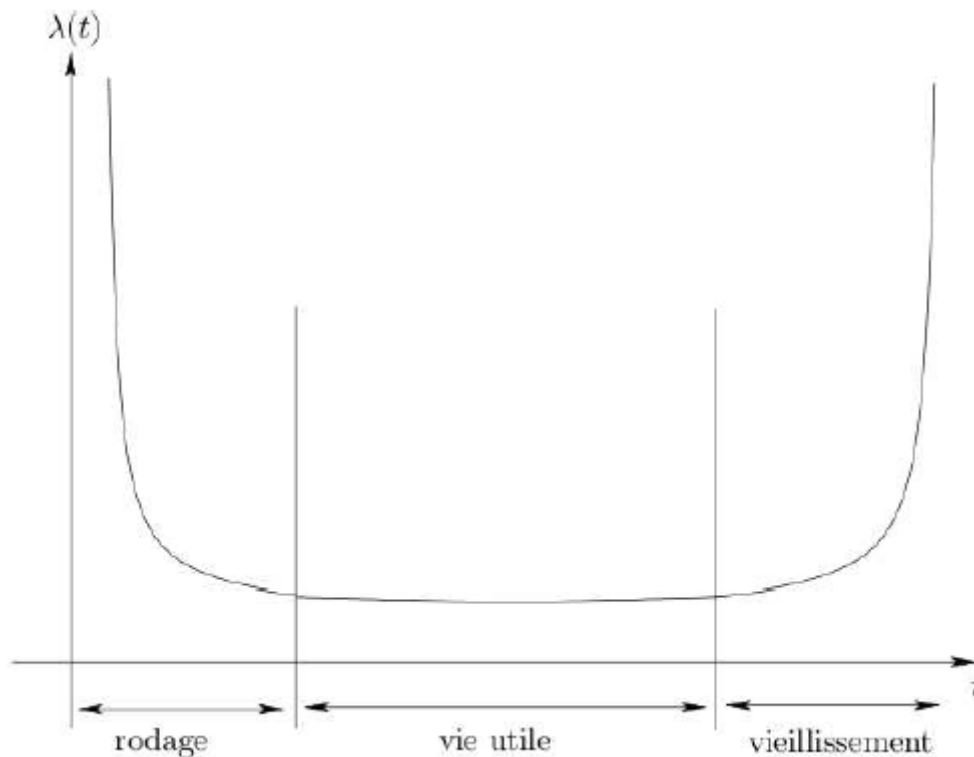


FIG. IV.2 - Taux de défaillance d'un élément en fonction du temps.

2 Fiabilité d'un système

Dans toute la suite du chapitre, on supposera que les temps de bon fonctionnement des éléments sont indépendants entre eux.

2.1 Système en série

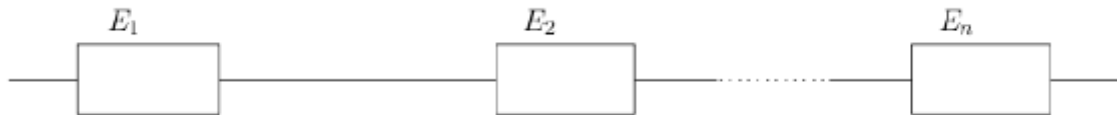


FIG. IV.3 - Système de n éléments en série.

Le système fonctionne si et seulement si tous les éléments fonctionnent. On a :

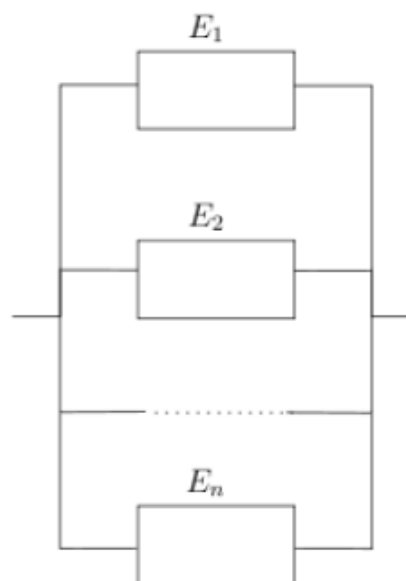
$$R_S(t) = \text{IP}(T_{E_1} > t \cap T_{E_2} > t \cap \dots \cap T_{E_n} > t)$$

$$R_S(t) = \prod_{i=1}^n \text{IP}(T_{E_i} > t) = \prod_{i=1}^n R_{E_i}(t)$$

Proposition 13 Le taux de défaillance du système est égal à la somme des taux de défaillances des éléments en série. Autrement dit :

$$\lambda_S(t) = \sum_{i=1}^n \lambda_{E_i}(t)$$

2.2 Système en parallèle



TAB. IV.4 - Système de n éléments en parallèle

Le système fonctionne si et seulement si au moins un des éléments fonctionne. On a :

$$R_p(t) = \mathbb{P}(T_{E_1} > t \cup T_{E_2} > t \cup \dots \cup T_{E_n} > t)$$

Rappel 1 On a l'égalité suivante : $\mathbb{P}[(A \cup B)^c] = \mathbb{P}(A^c \cap B^c)$

D'après le rappel, on a donc :

$$\begin{aligned} R_p(t) &= 1 - \mathbb{P}\left(\left(T_{E_1} > t\right)^c \cap \left(T_{E_2} > t\right)^c \cap \dots \cap \left(T_{E_n} > t\right)^c\right) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(T_{E_i} \leq t) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^n (1 - \mathbb{P}(T_{E_i} > t)) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^n (1 - R_{E_i}(t)) \end{aligned}$$

Remarque 19 Il n'existe pas de relation simple entre le taux de défaillance du système et celui des taux de défaillance des n éléments.

2.3 Système mixte

Dans certains cas, les systèmes en parallèle et les systèmes en série sont mélangés. Il est possible alors d'avoir des systèmes comme celui de la figure :

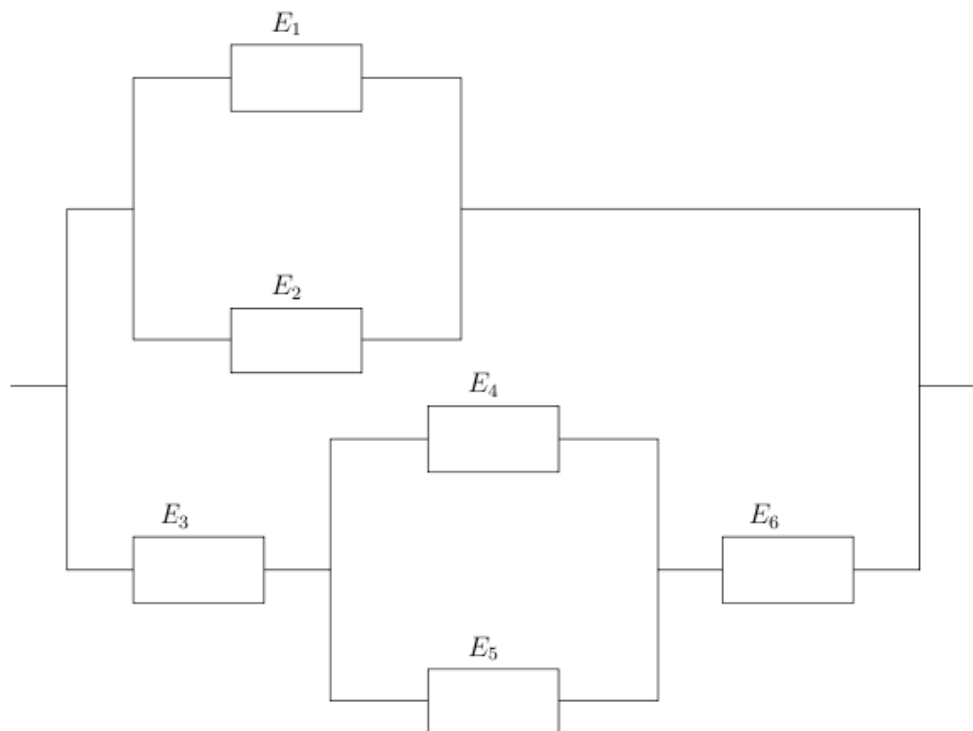
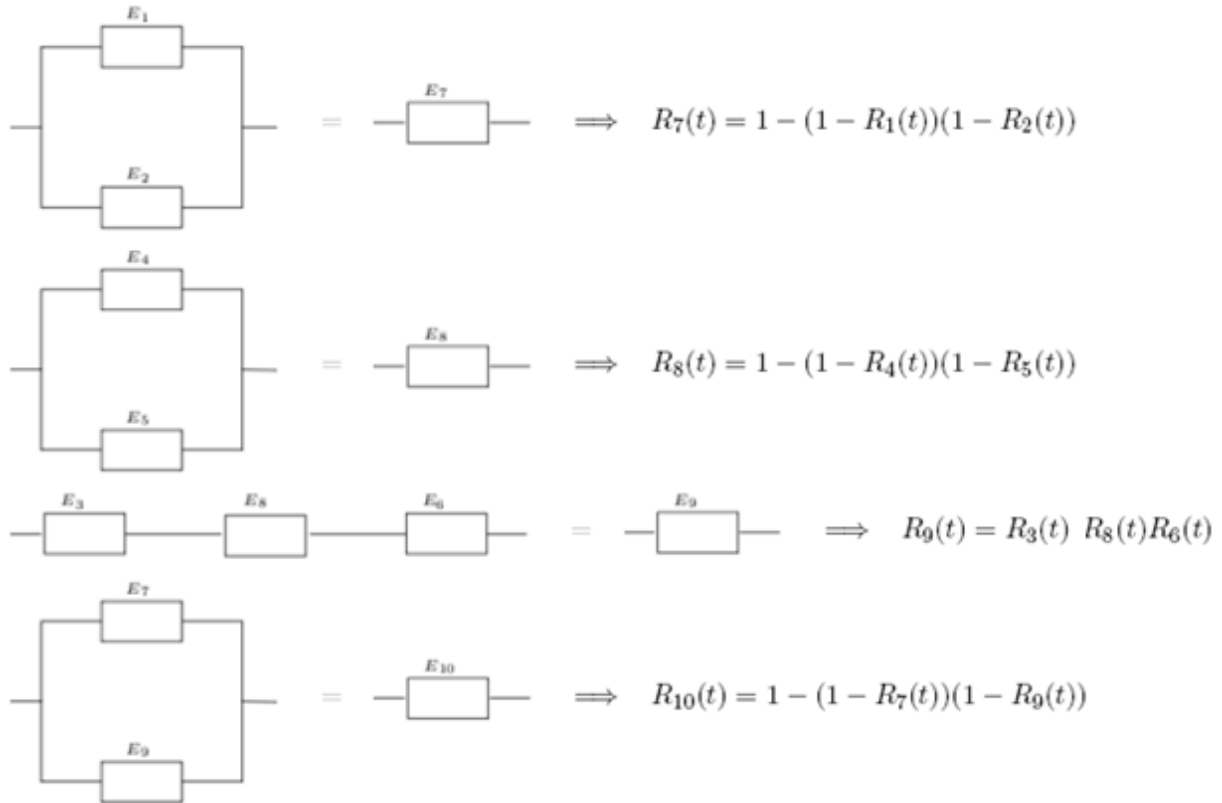


FIG. IV.5 – système mixte.

Définition 35 Un système *mixte* est un système qui peut être décomposé en sous-systèmes en parallèle et/ou en série.

Pour calculer la fiabilité du système de la figure IV.5, nous allons le décomposer en sous-systèmes :



$R_{10}(t)$ est alors la fiabilité du système mixte. On a :

$$R_{mixte}(t) = 1 - (1 - (1 - (1 - R_1(t))(1 - R_2(t))))(1 - R_3(t)(1 - (1 - R_4(t))(1 - R_5(t))))R_6(t)$$

2.4 Système à redondance active r/n

Le système fonctionne si et seulement si au moins r éléments sur n fonctionnent. On peut montrer qu'on a alors :

$$R_{r/n}(t) = \sum_{k=r}^n C_n^k (R(t))^k [1 - R(t)]^{n-k}$$

si tous les éléments ont même fiabilité $R(t)$.

Nous n'écrivons pas la formule dans le cas contraire.

Remarque 20 Dans le cas où $r = 1$, c'est un système parallèle. Dans le cas où $r = n$, c'est un système en série.

2.5 Autres systèmes

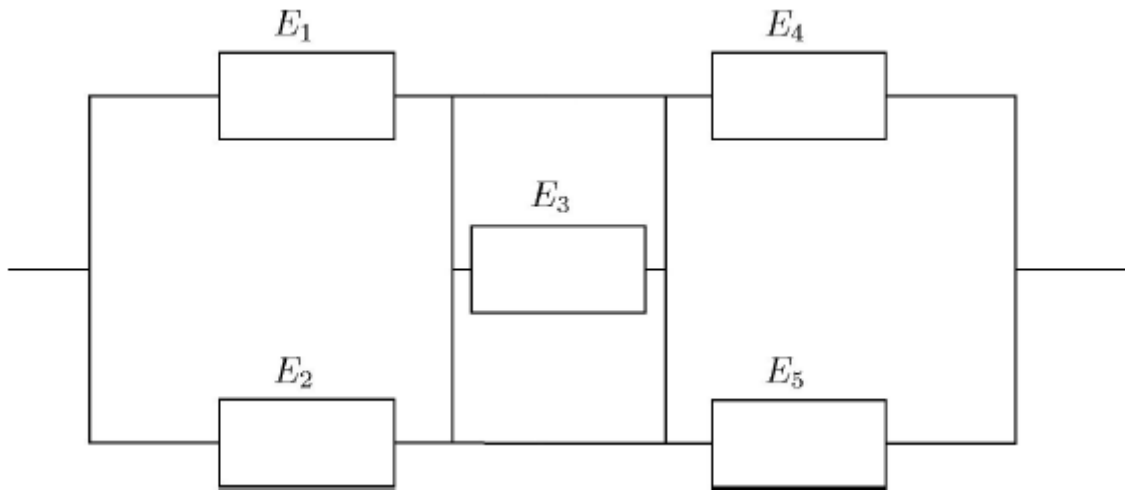


FIG. IV.6 - Système pouvant se ramener à des sous-systèmes parallèles et séries

Le système de la figure IV.6 n'est ni parallèle, ni série, ni mixte. En effet, la nature du système dépend du fonctionnement de l'élément E_3 .

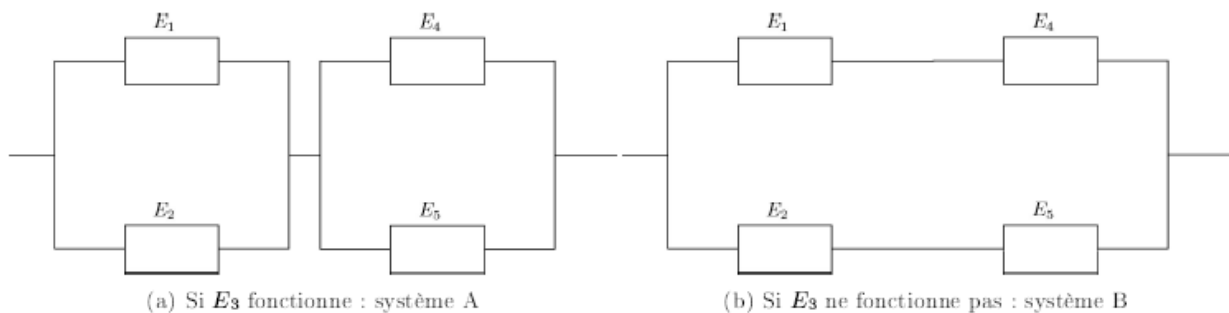


FIG. IV.7 – Sous-système de la figure IV.6

- Si l'élément E_3 fonctionne, on est en présence d'un système mixte (système A) : deux éléments parallèles mis en série, avec pour fiabilité :

$$R_A(t) = (1 - (1 - R_1(t))(1 - R_2(t)))(1 - (1 - R_4(t))(1 - R_5(t))).$$

- Si l'élément E_3 ne fonctionne pas, on est en présence d'un autre système mixte (système B) : deux éléments en série mis en parallèle, avec pour fiabilité :

$$R_B(t) = 1 - (1 - R_1(t)R_4(t))(1 - R_2(t)R_5(t)).$$

On a alors : $R_{\text{système}}(t) = R_3(t)R_A(t) + [1 - R_3(t)]R_B(t)$.

3 Eléments réparables

3.1 Maintenabilité

Définition 36 Soit S le temps de réparation. L'élément est mis en réparation à $t = 0$. On appelle *maintenabilité* à l'instant t la probabilité que la réparation soit effectuée avant l'instant t , c'est-à-dire :

$$M(t) = \text{IP}(S \leq t) .$$

Remarques 21

1. On a $M(0) = 0$ et $M(+\infty) = 1$. Autrement dit, l'élément n'a subi aucune réparation au moment où il tombe en panne! L'autre égalité nous dit que l'élément sera réparé au bout d'un temps certain!
2. On appelle *immaintenabilité* la quantité $\bar{M} = 1 - M(t)$.
3. De manière analogue au MTTF, on peut définir le temps moyen de réparation (MTTR) par : $\text{MTTR} = \text{IE}(S)$.

3.2 Taux de réparation

Définition 37 Le *taux de réparation moyen* sur $[t; t + \Delta t]$ est la probabilité que l'élément soit réparé entre t et $t + \Delta t$ sachant qu'il n'a pas été réparé avant, divisé par Δt , c'est-à-dire :

$$\mu(t; t + \Delta t) = \frac{1}{\Delta t} \text{IP}(t < S \leq t + \Delta t \mid S > t)$$

Définition 38 On définit le *taux de réparation instantané* par :

$$\mu(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mu(t; t + \Delta t)$$

Proposition 14 On a le résultat suivant :

$$\mu(t) = \frac{M'(t)}{1 - M(t)}$$

3.3 Disponibilité

Définition 39 On appelle *disponibilité* de l'élément la probabilité que l'élément fonctionne à l'instant t . On la note $A(t)$.

Remarque 22 Tous les résultats du paragraphe précédent sur la fiabilité des différents systèmes étudiés s'appliquent pour la disponibilité.

Par exemple, pour un système série, on a :

$$A_s(t) = \prod_{i=1}^n A_i(t),$$

et pour un système parallèle, on a :

$$A_p(t) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - A_i(t)),$$

3.3.1 Cas où $\lambda(t)$ et $\mu(t)$ sont constants

($\lambda(t)$: taux de défaillance et $\mu(t)$: taux de réparation)

Proposition 15 La disponibilité du système vérifie l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\partial A}{\partial t}(t) = -(\lambda + \mu)A(t) + \mu$$

3.3.2 Cas où $\lambda(t)$ est constant et $\mu(t)$ quelconque

Soit S le temps de réparation, on a :

$$\mathbb{P}(t < S \leq t + \Delta t) = g(t)\Delta t + o(\Delta t)$$

où $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0$

Proposition 16 La disponibilité du système vérifie l'équation intégro-différentielle suivante :

$$\frac{\partial A}{\partial t}(t) = -\lambda A(t) + \lambda \int_0^t A(t-u)g(u)du + (1 - A(0))g(t)$$

Remarque 23 Pour résoudre cette équation, on fait appel aux transformées de Laplace (hors programme).

Chapitre V

Processus stochastique

Ce chapitre sera abordé directement dans le cadre de l'application en fiabilité, afin de faciliter sa compréhension.

1 Introduction

Nous avons résolu le problème de la disponibilité d'un système, c'est à dire à un instant t , quelle est la probabilité que le système fonctionne, et ce pour un certain nombre de systèmes (parallèle, série, mixte,...). En revanche, il nous reste plusieurs problèmes à résoudre.

- Si on est en présence d'un système dont le temps de réparation est très court et dont le temps de bon fonctionnement est court, la disponibilité est proche de 1. Pourtant, l'appareil ne doit pas être considéré comme bon, puisqu'il va tomber en panne souvent. Il faut donc aussi étudier le nombre de défaillances et pas seulement les temps de défaillances.
- On veut aussi connaître la probabilité d'avoir un nombre donné de défaillances dans un intervalle de temps donné.
- Nous n'avons pas encore parlé des éléments de secours qui sont pourtant omniprésents dans le monde de l'aviation civile.

Il va donc falloir étudier le lien entre temps de défaillances et nombre de défaillances.

2 Processus ponctuel

Définition 40 On dit d'un processus $(T_n)_{n=1,2,\dots}$ qu'il est *ponctuel* si :

$$\forall n \geq 1, T_n < T_{n+1}$$

Exemples 25

1. Instants d'arrivée des avions dans un secteur,
2. Instants de passage de véhicules à un péage,
3. Instants de défaillance d'un système,...

Remarque 24 Le processus ponctuel est souvent interprété comme représentant les instants d'occurrence d'un phénomène aléatoire.

Définition 41 Le processus (N_t) est appelé *processus de comptage* si les conditions suivantes sont vérifiées :

1. $N_t \in \mathbb{N}$,
2. $s < t \Rightarrow N_s \leq N_t$,
3. $N_t - N_s$ représente le nombre d'événements qui se sont produits dans l'intervalle $]s; t]$.

La quantité $N_t - N_s$ est l'accroissement du processus.

Proposition 17 Si on pose $N_t = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{\{T_n \leq t\}}$ où (T_n) est un processus ponctuel, alors (N_t) est un processus de comptage.

3 Processus de renouvellement

3.1 Simple

Définition 42 (T_n) est un processus de *renouvellement simple* s'il existe des V.A. (ξ_n) indépendantes, de même loi, telles que :

$$T_0 = 0 \text{ et } T_n = T_{n-1} + \xi_n \quad \forall n = 1, 2, 3, \dots$$

Remarque 25 Si la durée de réparation est négligeable et que l'élément est remplacé, on pose ξ_n le temps de bon fonctionnement du $n^{\text{ième}}$ élément.

3.2 Alterné

Définition 43 (T_n) est un processus de *renouvellement alterné* s'il existe des V.A. (ξ_n) telles que :

$$T_0 = 0 \text{ et } T_n = T_{n-1} + \xi_n \quad \text{avec} \quad \begin{cases} (\xi_n) \text{ indépendantes,} \\ \xi_{2n+1} \text{ de même loi,} \\ \xi_{2n} \text{ de même loi.} \end{cases}$$

Remarque 26 Si on pose ξ_{2n+1} des temps de bon fonctionnement et ξ_{2n} des temps de réparation, le processus précédent correspond à l'étude de la disponibilité du chapitre précédent.

4 Processus de Poisson

4.1 Processus ponctuel

Définition 44 (T_n) est un processus de *Poisson homogène* de paramètre λ si (T_n) est un processus de renouvellement simple où les (ξ_n) sont des V.A. indépendantes et de même loi exponentielle de paramètre λ .

Proposition 18 Pour tout $n \geq 1$, la loi du vecteur (T_1, T_2, \dots, T_n) a pour densité :

$$f_{T_1, T_2, \dots, T_n}(t_1, t_2, \dots, t_n) = \lambda^n e^{-\lambda t_n} \mathbb{1}_{\{0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n\}}$$

Proposition 19 La loi de T_n est une loi Gamma $\gamma(n, \lambda)$, c'est à dire a pour densité :

$$f_{T_n}(t_n) = \lambda^n e^{-\lambda t_n} \frac{t_n^{n-1}}{(n-1)!} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}$$

Proposition 20 Soit un système à n éléments (un élément principal plus $n-1$ élément(s) de secours). La fiabilité du système est donnée par :

$$R_n(t) = \mathbb{P}(T_n > t) = e^{-\lambda t} \left(1 + \lambda t + \frac{(\lambda t)^2}{2!} + \dots + \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} \right) \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(t)$$

Nous allons étudier plus particulièrement le processus de comptage (N_t) associé au processus de Poisson homogène (T_n) .

4.2 Processus de comptage

Proposition 21 Soient (T_n) un processus de Poisson homogène et (N_t) son processus de comptage associé. La loi de N_t est une loi de Poisson de paramètre λt .

Il est parfois plus intéressant de travailler sur les accroissements du processus de comptage pour répondre à la question: quelle est la probabilité d'avoir deux défaillances entre un et deux ans de fonctionnement ?

Proposition 22 Soit (T_n) un processus de Poisson homogène, alors (N_t) , son processus de comptage associé, vérifie :

1. $N_0 = 0$,
2. N_t est à accroissements indépendants,
3. pour $0 \leq s < t$, la variable aléatoire réelle $N_t - N_s$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda(t - s)$.

ANNEXES

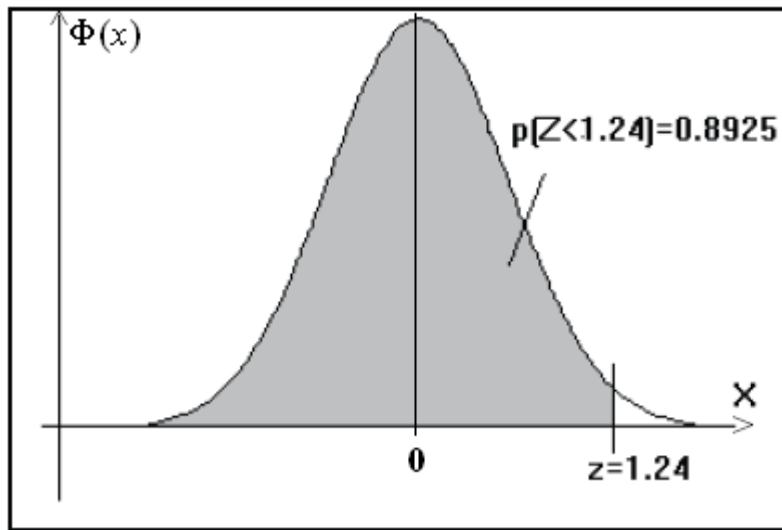
- Annexe 1 :** Lois discrètes
- Annexe 2 :** Lois continues
- Annexe 3 :** Table de la loi normale centrée, réduite.
- Annexe 4 :** TD n°1
- Annexe 5 :** TD n°2
- Annexe 6 :** TD n°3
- Annexe 7 :** TD n°4
- Annexe 8 :** TD n°5
- Annexe 9 :** TD n°6

Annexe 1 : Lois discrètes

Loi	Valeurs Possibles	Probabilités de ces valeurs	Espérance	Variance	Modèle
Uniforme sur un ensemble fini	$\{1, 2, \dots, n\}$	$IP(X=k) = \frac{1}{n}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$	i) Dans une urne, n boules numérotées de 1 à n . On effectue un tirage aléatoire ii) Jeu de dé à n faces équilibrées
Bernoulli	$\{0, 1\}$	$IP(X=0) = 1-p = q$ $IP(X=1) = p$ avec $0 \leq p \leq 1$	p	pq	Dans une urne, 2 catégories de boules : proportion p de boules blanches et q de noires. On effectue un tirage : X est la V.A. "nombre de boules blanches"
Binomiale $B(n, p)$	$\{0, 1, \dots, n\}$	$IP(X=k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ où $0 \leq p \leq 1$ et $p + q = 1$	np	npq	Dans une urne, 2 catégories de boules : proportion p de boules blanches et q de noires. On effectue n tirages : X est la V.A. "nombre de boules blanches"
Pascal	$\{r, r+1, \dots, \infty\}$	$IP(X=k) = C_{k-1}^{r-1} p^r q^{k-r}$ où $0 \leq p \leq 1$ et $p + q = 1$	$\frac{r}{p}$	$\frac{rq}{p^2}$	Dans une urne, 2 catégories de boules : proportion p de boules blanches et q de noires. On tire avec remise jusqu'à obtenir r boules blanches : X est la V.A. "nombre de tirages nécessaires"
Géométrique	$\{1, 2, \dots, \infty\}$	$IP(X=k) = q^{k-1} p$ où $0 \leq p \leq 1$ et $p + q = 1$	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$	Dans une urne, 2 catégories de boules : proportion p de boules blanches et q de noires. On tire avec remise jusqu'à obtenir 1 boule blanche : X est la V.A. "nombre de tirages nécessaires"
Poisson $P(\lambda)$	$\{0, 1, \dots, \infty\}$	$IP(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$	λ	λ	Loi limite d'une loi binomiale lorsque $n > 50$ et $p < 0,10$. Loi des événements rares en posant $\lambda = np$.

Annexe 2 : Lois continues

Loi	Densité de probabilité	Espérance	Variance	Remarques
Uniforme sur $[a,b]$ où $a < b$ $U(a,b)$	$\begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a;b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$\frac{b+a}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	
Exponentielle	$\begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	
Loi normale ou loi de Gauss $N(\mu, \sigma^2)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}, \forall x \in \mathbb{R}$	μ	σ^2	Table pour $N(0,1)$
Cauchy	$\frac{1}{\pi(1+x^2)}, \forall x \in \mathbb{R}$	<i>Non définie</i>	<i>Non définie</i>	
Gamma $\gamma(r, \lambda)$ où $r > 0$ et $\lambda > 0$	$\begin{cases} \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} e^{-\lambda x} x^{r-1} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$	$\frac{r}{\lambda}$	$\frac{r}{\lambda^2}$	$\Gamma(r) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{r-1} dt$
Log-normale	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\ln x - m)^2},$ si $x > 0$ et $\sigma > 0$	$e^{m + \frac{\sigma^2}{2}}$	$e^{2m + \sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1)$	Si $X \sim$ Log-Normale alors $\ln(X) \sim N(\mu, \sigma^2)$
Chi-deux à n degrés de liberté χ_n^2 ($n \in \mathbb{N}$)	$\begin{cases} \frac{1}{2\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} e^{-\frac{x}{2}} \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$	n	$2n$	Tables de $n=1$ à 30. Pour $n > 30$ on utilise $\sqrt{2\chi_n^2} - \sqrt{2n-1} \approx N(0,1)$
Student à n degrés de liberté S_n ($n \in \mathbb{N}$)	$\frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$	0 si $n > 1$	$\frac{n}{n-2}$ si $n > 2$	Tables de $n=1$ à 30. Pour $n > 30$ on utilise $X \sim S_n \approx N(0,1)$

Annexe 3 : Table de la loi normale centrée réduite

Il existe des tables de la fonction de répartition, donnant des valeurs approchées de $\Phi(x)$.

On se limite à des x positifs ou nuls : en effet, si par exemple on connaît l'approximation de $\Phi(0,5) \approx 0,69146$, on en déduit $\Phi(-0,5) \approx 1 - 0,69146$.

La table suivante donne pour tout x de 0 jusqu'à 3,99 par pas de 0,01, la valeur de $10^5 \Phi(x)$. Ces valeurs sont arrondies à l'unité la plus proche.

L'entrée en ligne donne les deux premiers chiffres de x , c'est-à-dire le chiffre des unités et celui des dixièmes, et l'entrée en colonne le chiffre des centièmes.

Par exemple :

pour $\Phi(1,73) \approx 0,95818$, on choisira 1,7 en ligne et 0,03 en colonne ($1,7 + 0,03 = 1,73$) et l'intersection nous donnera le résultat.

	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	50000	50399	50798	51197	51595	51994	52392	52790	53188	53586
0,1	53983	54380	54776	55172	55567	55962	56356	56749	57142	57535
0,2	57926	58317	58706	59095	59483	59871	60257	60642	61026	61409
0,3	61791	62172	62552	62930	63307	63683	64058	64431	64803	65173
0,4	65542	65910	66276	66640	67003	67364	67724	68082	68439	68793
0,5	69146	69497	69847	70194	70540	70884	71226	71566	71904	72240
0,6	72575	72907	73237	73565	73891	74215	74537	74857	75175	75490
0,7	75804	76115	76424	76730	77035	77337	77637	77935	78230	78524
0,8	78814	79103	79389	79673	79955	80234	80511	80785	81057	81327
0,9	81594	81859	82121	82381	82639	82894	83147	83398	83646	83891
1	84134	84375	84614	84849	85083	85314	85543	85769	85993	86214
1,1	86433	86650	86864	87076	87286	87493	87698	87900	88100	88298
1,2	88493	88686	88877	89065	89251	89435	89617	89796	89973	90147
1,3	90320	90490	90658	90824	90988	91149	91309	91466	91621	91774
1,4	91924	92073	92220	92364	92507	92647	92785	92922	93056	93189
1,5	93319	93448	93574	93699	93822	93943	94062	94179	94295	94408
1,6	94520	94630	94738	94845	94950	95053	95154	95254	95352	95449
1,7	95543	95637	95728	95818	95907	95994	96080	96164	96246	96327
1,8	96407	96485	96562	96638	96712	96784	96856	96926	96995	97062
1,9	97128	97193	97257	97320	97381	97441	97500	97558	97615	97670
2	97725	97778	97831	97882	97932	97982	98030	98077	98124	98169
2,1	98214	98257	98300	98341	98382	98422	98461	98500	98537	98574
2,2	98610	98645	98679	98713	98745	98778	98809	98840	98870	98899
2,3	98928	98956	98983	99010	99036	99061	99086	99111	99134	99158
2,4	99180	99202	99224	99245	99266	99286	99305	99324	99343	99361
2,5	99379	99396	99413	99430	99446	99461	99477	99492	99506	99520
2,6	99534	99547	99560	99573	99585	99598	99609	99621	99632	99643
2,7	99653	99664	99674	99683	99693	99702	99711	99720	99728	99736
2,8	99744	99752	99760	99767	99774	99781	99788	99795	99801	99807
2,9	99813	99819	99825	99831	99836	99841	99846	99851	99856	99861
3	99865	99869	99874	99878	99882	99886	99889	99893	99896	99900
3,1	99903	99906	99910	99913	99916	99918	99921	99924	99926	99929
3,2	99931	99934	99936	99938	99940	99942	99944	99946	99948	99950
3,3	99952	99953	99955	99957	99958	99960	99961	99962	99964	99965
3,4	99966	99968	99969	99970	99971	99972	99973	99974	99975	99976
3,5	99977	99978	99978	99979	99980	99981	99981	99982	99983	99983
3,6	99984	99985	99985	99986	99986	99987	99987	99988	99988	99989
3,7	99989	99990	99990	99990	99991	99992	99992	99992	99992	99992
3,8	99993	99993	99993	99994	99994	99994	99994	99995	99995	99995
3,9	99995	99995	99996	99996	99996	99996	99996	99996	99997	99997

Annexe 4 : TD n°1**Exercice 1**

On donne deux événements A et B tels que $IP(A) = 0,81$ et $IP(B) = 0,16$. Calculer $IP(A \cup B)$ dans chacun des cas suivants :

- 1) A et B sont disjoints (on dit aussi incompatibles);
- 2) $IP(A \cap B) = 0,11$.

Exercice 2

Dans une usine, la construction d'un train d'atterrissage nécessite l'exécution de trois tâches consécutives, notées A (construction du compas), B (construction de l'amortisseur), C (construction de la contrefiche principale). Un gestionnaire de l'entreprise a relevé sur une longue période les durées nécessaires pour effectuer chacune des trois tâches. Pour A , un jour ou deux jours; pour B , quatre jours, cinq jours ou six jours; pour C , deux jours ou trois jours. On admet qu'à l'avenir, la durée d'exécution pour chacune des tâches A , B et C ne peut pas prendre d'autres valeurs que celles qui ont été données ci-dessus. Dans ce qui suit, on appelle "temps de construction" un triplet (a, b, c) de trois nombres donnant les durées d'exécution des trois tâches A , B et C .

- 3) À l'aide d'un arbre, donner tous les temps de constructions possibles.
- 4) Chaque temps de construction définit un événement élémentaire. L'observation sur une longue période conduit à admettre que tous les événements élémentaires sont équiprobables.

Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :

- a) E_1 : "le temps de construction dure huit jours";
- b) E_2 : "le temps de construction dure au plus neuf jours";
- c) E_3 : "le temps de construction dure strictement plus de neuf jours".

Exercice 3

Nous avons une population de 10.000 personnes. Pour chacune de ces personnes, nous avons récupéré leur groupe sanguin ainsi que leur rhésus. Ces données sont récapitulées dans le tableau suivant :

Groupes	A	B	AB	O	Total
Positif (+)	3270	810	415	3600	8095
Négatif (-)	720	190	95	900	1905
Total	3990	1000	510	4500	10000

Parmi ces 10.000 personnes, on en tire une au hasard (équiprobabilité).

- 1) Quel est la probabilité qu'une personne soit du groupe O?
- 2) Quel est la probabilité qu'une personne soit rhésus + ?
- 3) Quel est la probabilité qu'une personne soit O+ ?
Les événements "être du groupe O" et "être rhésus +" sont-ils indépendants?
- 4) Quel est la probabilité qu'une personne soit du groupe A sachant qu'elle est rhésus - ?

Exercice 4

Deux ateliers, notés A et B , d'une même entreprise produisent chaque jour respectivement 1000 et 800 pièces d'un même modèle. 2% des pièces produites par l'atelier A et 3% des pièces produites par l'atelier B sont défectueuses.

- 1) Compléter le tableau suivant qui décrit la production journalière.

	Nombre de pièces défectueuses	Nombre de pièces non défectueuses	Total
Nombre de pièces produites par l'atelier A			
Nombre de pièces produites par l'atelier B			
Total			1800

2) Un jour donné, on choisit au hasard une pièce parmi les 1800 pièces produites par les deux ateliers. On est dans une situation d'équiprobabilité. On considère les événements suivants :

A : "la pièce choisie provient de l'atelier A";

B : "la pièce choisie provient de l'atelier B";

D : "la pièce choisie est défectueuse";

\bar{D} : "la pièce choisie n'est pas défectueuse".

Déterminer à l'aide du tableau précédent les probabilités suivantes :

a) $IP(D)$, $IP(A \cap D)$, $IP(A / D)$.

b) $IP(\bar{D})$, $IP(B \cap \bar{D})$, $IP(B / \bar{D})$.

3) Vérifier que $IP(A \cap D) = IP(A / D) \times IP(D)$ et que $IP(B \cap \bar{D}) = IP(B / \bar{D}) \times IP(\bar{D})$.

Exercice 5

Une société de composants électroniques fabrique en très grande quantité un certain type de puces. Une puce est conforme si sa masse exprimée en grammes appartient à l'intervalle $[1,2; 1,3]$.

La probabilité qu'une puce soit conforme est 0,98. On choisit une puce au hasard dans la production. On note :

A l'événement "La puce est conforme";

B l'événement "La puce est refusée".

On contrôle toutes les puces. Le mécanisme de contrôle est tel que

- une puce conforme est acceptée avec une probabilité de 0,98;

- une puce qui n'est pas conforme est refusée avec une probabilité de 0,99.

On a donc: $IP(A) = 0,98$; $IP(\bar{B} / A) = 0,98$; $IP(B / \bar{A}) = 0,99$.

1) Déterminer $IP(B / A)$, puis $IP(B \cap A)$ et $IP(B \cap \bar{A})$.

2) Calculer :

a) la probabilité qu'une puce soit refusée;

b) la probabilité qu'une puce soit conforme, sachant qu'elle est refusée.

Annexe 5 : TD n°2**Exercice 1**

Une entreprise construit des géodes. Dans sa production, on suppose que la proportion de géodes défectueux est égale à p . On prend n géodes au hasard. Calculer la probabilité que :

- 1) aucun géode ne soit défectueux.
- 2) exactement un géode soit défectueux.
- 3) au moins un géode soit défectueux.
- 4) k géodes soient défectueux.

Exercice 2

Soit X une V.A.R. binomiale de paramètres n et $0,01$, notée $B(n; 0,01)$.

- 1) Déterminer n pour que $\text{IP}(X = 0) \leq 0,01$.
- 2) Déterminer n pour que $\text{IP}(X \geq 1) \geq 0,90$.

Exercice 3

Soit X une V.A.R. binomiale $B(3; 0,2)$.

- 1) Calculer $\text{IP}(X < 0), \text{IP}(X < 1), \text{IP}(X < 2), \text{IP}(X < 3), \text{IP}(X < 4)$.
- 2) En déduire le tracé de la fonction de répartition.

Exercice 4

Un laboratoire doit analyser N prélèvements pour déterminer ceux qui contiennent un corps C donné. On admet que pour un prélèvement quelconque, la probabilité qu'il contienne le corps C est p .

On pose $q = 1 - p$ et on suppose que les prélèvements sont indépendants.

On répartit les prélèvements en g groupes d'effectif n ($N = ng$) et pour chaque groupe, on constitue un mélange à l'aide de quantités égales de chacun des n prélèvements. Si ce mélange ne contient pas le corps C , une seule analyse aura établi qu'aucun des n prélèvements du groupe ne contient le corps C . Si ce mélange contient le corps C , il faut alors analyser séparément les n prélèvements pour déterminer ceux qui contiennent le corps C : le nombre d'analyses faites pour le groupe est alors $n+1$.

On désigne par X la variable aléatoire représentant le nombre total d'analyses effectuées.

- 1) Que représente $Y = \frac{X - g}{n}$?
- 2) Déterminer la loi de Y .
- 3) Déterminer $\text{IE}(X)$ et $\text{Var}(X)$.

Application numérique : $N = 200, p = 0,05, n = 4$ ou 5 .

Exercice 5

Le patron d'un grand hôpital de la région toulousaine envisage de programmer la construction de nouvelles salles d'opérations de façon à réduire si nécessaire le délai d'attente des patients. Actuellement, son établissement compte 5 blocs opératoires. Les interventions étant lourdes, on compte une demi-journée d'occupation du bloc par intervention.

Une enquête sur le nombre d'interventions par demi-journée souhaitées par les chirurgiens est menée sur un échantillon de 180 demi-journées, échantillon supposé représentatif du fonctionnement de l'hôpital. La distribution statistique issue de l'étude est donnée par le tableau suivant :

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F_i	3	15	27	33	36	27	18	9	6	4	2

où x_i représente le nombre d'interventions souhaitées par les chirurgiens par demi-journée et F_i est la fréquence.

- 1) Tracer l'histogramme.
- 2) On suppose alors que le nombre d'interventions par demi-journée suit une loi de Poisson, $\mathcal{P}(\lambda)$, c'est à dire que :

$$\text{IP}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

- a) Calculer λ .
- b) Quelle est la probabilité de n'avoir aucun patient en attente?
- c) Combien faut-il de blocs opératoires supplémentaires au minimum pour que la probabilité précédente soit supérieure à 0,95?

Exercice 6

Une variable aléatoire X suit une loi binomiale $B(n, p)$. Les résultats de X sont affichés par un compteur détraqué :

- pour $X \neq 0$, le compteur affiche la valeur correcte de X .
- pour $X = 0$, le compteur affiche une valeur au hasard entre 1 et n .

On note Y le résultat du compteur détraqué.

- 1) Déterminer la loi de Y .
- 2) Calculer $\text{IE}[Y]$ et vérifier $\text{IE}[Y] \geq \text{IE}[X]$.

Annexe 6 : TD n°3**Exercice 1**

Lors d'un procès en attribution de paternité, un expert témoigne que la durée de la grossesse, en jours, c'est-à-dire le laps de temps entre la conception et la naissance de l'enfant, est de distribution approximativement normale avec paramètres $m = 270$ et $\sigma^2 = 100$. L'un des pères putatifs est en mesure de prouver son absence du pays pendant une période s'étendant entre le 290^{ième} et le 240^{ième} jour précédent l'accouchement. Quelle est la probabilité que la conception ait eu lieu à ce moment ?

Exercice 2

On suppose que la durée d'une conversation téléphonique, mesurée en minutes, est une variable aléatoire exponentielle de paramètre $\lambda = 0,1$. J'arrive à une cabine et quelqu'un passe juste avant moi.

Avec quelle probabilité dois-je attendre :

- 1) plus de 10 minutes ?
- 2) entre 10 et 20 minutes ?

Exercice 3

On suppose que la durée de vie d'un individu est une variable aléatoire continue dont la densité de

probabilité f est donnée par :
$$\begin{cases} f(t) = kt^2(100-t)^2 & \text{si } 0 \leq t \leq 100, \\ f(t) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- 1) Déterminer k pour que f soit effectivement une densité de probabilité.
- 2) Calculer l'espérance mathématique de la durée de vie d'un individu, puis son écart-type.
- 3) Calculer la probabilité pour qu'un individu meure entre 30 et 60 ans.

Exercice 4

Soit X une VAR, suivant une loi normale de paramètre m et σ^2 .

- 1) Déterminer la loi de $T = \frac{X - m}{\sigma}$.

La V.A.R. X suit maintenant une loi normale de moyenne 20 et de variance 25, notée $N(20;25)$.

- 2) Calculer les probabilités suivantes :

- a) $\text{IP}(X \leq 28)$,
- b) $\text{IP}(X \geq 12)$,
- c) $\text{IP}(12 \leq X \leq 28)$.

- 3) Déterminer les valeurs de a telles que :

- a) $\text{IP}(X \leq a) = 0,99$,
- b) $\text{IP}(X \leq a) = 0,01$,
- c) $\text{IP}(X \geq a) = 0,05$,
- d) $\text{IP}(20 - a \leq X \leq 20 + a) = 0,95$.

Exercice 5

- 1) Soit X une VAR, suivant une loi normale de paramètre m et σ^2 .

- a) Déterminer la loi de $Y = \exp(X)$. Cette loi est appelée Log-normale.
- b) Déterminer la loi de $Z = X^2$.

- 2) Montrer que si U suit la loi uniforme sur $]0; 1[$ alors $Y = \frac{-\ln(1-U)}{\lambda}$ suit une loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$.

Annexe 7 : TD n°4**Exercice 1**

On considère un couple (X, Y) de VAR discrètes dont la loi est donnée par :

$X \backslash Y$	0	1	4
-2	0	0	1/6
-1	0	1/4	0
0	1/6	0	0
1	0	1/4	0
2	0	0	1/6

1. Déterminer les lois marginales de X et de Y .
2. Les VAR X et Y sont-elle indépendantes ?
3. Calculer $\text{cov}(X, Y)$ et faire une remarque sur ce résultat.

Exercice 2

Soit (X, Y) un couple de VAR de densité :

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{4}(1+xy) & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \text{ et } -1 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et soit (U, V) un autre couple de V.A.R. de densité :

$$f_{U,V}(u, v) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{si } -1 \leq u \leq 1 \text{ et } -1 \leq v \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- 1) Calculer les lois marginales de X et de Y .
- 2) Calculer les lois marginales de U et de V .
- 3) Etudier l'indépendance des couples (X, Y) et (U, V) .

Exercice 3

Trois personnes entrent l'une après l'autre dans les locaux d'une administration française. Nous voulons connaître la loi du temps d'attente de la troisième personne. Nous allons étudier deux situations :

1. Il n'y a qu'un seul guichet. La troisième personne doit attendre que les deux personnes aient terminé pour pouvoir être reçue.
 2. Il y a deux guichets. La troisième personne doit attendre qu'un des deux guichets se libère pour pouvoir être reçue.
- 1) En posant X_1 (resp. X_2) la variable aléatoire réelle du temps de passage au guichet de la première personne (resp. de la deuxième), déterminer X_3 , la variable aléatoire réelle du temps d'attente de la troisième personne, en fonction de X_1 et X_2 dans les deux situations.

2) On suppose que les variables aléatoires X_1 et X_2 peuvent être modélisées par des lois exponentielles de paramètres distincts λ_1 et λ_2 , et que ces VAR sont indépendantes.

- a) Après avoir fait le changement de variables $(X_1, X_2) \mapsto (X_1, X_1 + X_2)$, donner la loi de X_3 dans la première situation. Calculer le temps moyen d'attente de la troisième personne dans la première situation.
- b) Calculer la loi de $T = \inf(X_1; X_2)$. Pour cela, calculer la fonction de répartition de T en utilisant l'équivalence suivante :

$$\inf(X_1, X_2, \dots, X_n) > t \Leftrightarrow \forall i, X_i > t$$

Calculer alors le temps moyen d'attente de la troisième personne dans la seconde situation.

Exercice 4

Soit $\theta > 0$ et $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 < y < x\}$. Un couple (X, Y) de variables aléatoires réelles a pour densité :

$$f(x, y) = \begin{cases} \theta^2 e^{-\theta x} & \text{si } (x, y) \in D \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- 1) Calculer les lois marginales de X et de Y .
- 2) Calculer la loi de $Z = Y/X$ et montrer que les variables aléatoires X et Z sont indépendantes.

Exercice 5

Soient U et V deux variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $]0, 1[$. On définit les variables aléatoires X et Y de la façon suivante :

$$\begin{cases} X = \sqrt{-2 \ln U} \cos(2\pi V) \\ Y = \sqrt{-2 \ln U} \sin(2\pi V) \end{cases}$$

Montrer que X et Y sont des variables aléatoires normales centrées réduites indépendantes.

On rappelle que : $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$.

Annexe 8 : TD n°5**Exercice 1**

Pour tout entier naturel n non nul, on considère la fonction f_n définie par :

$$f_n(x) = n^2 x e^{-\frac{n^2 x^2}{2}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x).$$

- 1) Montrer que f_n est la densité d'une variable aléatoire.
- 2) Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires telle que, pour tout entier $n \geq 1$, X_n admet pour densité f_n . Démontrer que la suite $(X_n)_n$ converge en probabilité vers une variable aléatoire X que l'on précisera.

Exercice 2

Un fournisseur d'accès à Internet met en place un point local d'accès, qui dessert 5000 abonnés. A un instant donné, chaque abonné a une probabilité égale à 20% d'être connecté. Les comportements des abonnés sont supposés indépendants les uns des autres.

- 1) On note X la variable aléatoire égale au nombre d'abonnés connectés à un instant t . Quelle est la loi de X ? Quelle est son espérance, son écart-type ?
- 2) Le fournisseur d'accès souhaite savoir combien de connexions simultanées le point d'accès doit pouvoir gérer pour que sa probabilité d'être saturé à un instant donné soit inférieure à 2,5%. Proposer une valeur approchée de ce nombre de connexions.

Exercice 3

Il arrive assez souvent que le nombre de réservations pour une liaison aérienne soit supérieur au nombre de passagers se présentant effectivement le jour du vol.

Cela est dû à des empêchements imprévisibles de certains passagers et à une politique systématique de certains d'entre eux qui réservent des places sur plusieurs vols de façon à choisir au dernier moment celui qui leur convient le mieux (en raison de la concurrence, et selon les tarifs choisis, les compagnies ne pénalisent pas les clients qui se désistent et ne font payer effectivement que ceux qui embarquent).

Pour compenser ce phénomène, une compagnie aérienne exploitant un avion de 300 places décide de faire de la surréservation (*surbooking*) en prenant pour chaque vol un nombre $n > 300$ de réservations. S'il se présente plus de 300 passagers à l'embarquement, les 300 premiers arrivés prennent leur vol et les autres sont dédommagés financièrement.

- 1) On considère que les passagers sont mutuellement indépendants et que la probabilité de désistement de chacun d'eux est 10%. On note n le nombre de réservations prises par la compagnie pour un vol donné et S_n le nombre (aléatoire) de passagers se présentant à l'embarquement pour ce vol. Donner la loi de S_n , son espérance $IE(S_n)$ et sa variance $Var(S_n)$.
- 2) Le directeur commercial de la compagnie aimerait connaître la valeur maximale de n telle que $P(S_n \leq 300) \geq 0,99$. Proposer une solution approchée de ce problème.

Exercice 4

Un paquebot tout neuf (Le Titanic !) quitte l'Europe à Queenstown (Irlande) le 11 avril 1912 à midi pour son voyage inaugural. Il doit traverser l'Atlantique sur 5 500 km et arriver à New York, si tout se passe bien, le matin du 17 avril où une grande fête est déjà prévue ! Il était parti de Southampton la veille et avait fait escale à Cherbourg en fin de journée.

1°) Le Titanic pouvait accueillir 3 000 passagers et on avait enregistré R réservations (indépendantes) pour le voyage inaugural.

Habituellement la probabilité d'annulation est de 0,2.

On note X le nombre de passagers présents à l'embarquement le jour du départ.

Déterminer la loi de X ainsi que son espérance et sa variance

2°) Dans le cas $R = 3 000$, calculer les probabilités des événements suivants :

- i) $(2 370 \leq X \leq 2 430)$
- ii) $(X > 2 360)$,
- iii) $X < 2 000$.
- iv) Est-il normal qu'il y ait eu seulement 1 300 passagers ?

3°) Toujours dans le cas $R = 3 000$, déterminer le nombre a tel que :

$$IP(2 400 - a < X < 2 400 + a) = 0,95.$$

4°) Combien de réservations pourrait-on enregistrer pour que la probabilité d'être en surcapacité (plus de 3000 personnes au départ) soit inférieure à 0,05 ?

Annexe 8 : TD n°6**Exercice 1**

Soit un système A constitué de deux éléments en série de même taux de défaillance,

$$\lambda_1(t) = 0,003t^{-0,5} \text{ pannes/heure.}$$

Déterminer la fiabilité de ce système.

Calculer cette fiabilité pour 1000 heures.

Exercice 2

Soit un système B constitué de deux éléments en parallèle de taux de défaillance,

$$\lambda_2(t) = 0,001 \text{ pannes/heure.}$$

$$\lambda_3(t) = 0,002 \text{ pannes/heure.}$$

Déterminer la fiabilité de ce système.

Calculer cette fiabilité pour 1000 heures.

Exercice 3

Soient deux systèmes :

- système C : deux éléments en série de même taux de défaillance λ ;
- système D : deux éléments en parallèle de même taux de défaillance λ .

Déterminer la fiabilité des deux systèmes.

Quel est le système qui possède la plus forte fiabilité? Expliquer concrètement pourquoi.

Exercice 4

Reprenons les systèmes A et B des exercices 1 et 2.

Dessinez le diagramme de fiabilité du système E obtenu en mettant en parallèle les systèmes A et B .

Déterminer alors la fiabilité du nouveau système de deux manières différentes.

Calculer ensuite cette fiabilité pour 1000 heures.

Exercice 5

Pour la construction des amortisseurs d'avions, on cherche à tester la fiabilité des pistons. Ces derniers équipent des amortisseurs destinés à des avions possédant 3 trains d'atterrissage (1 avant et deux arrières). Ces trois trains comportent chacun deux amortisseurs.

Le taux de défaillance des amortisseurs du train avant est égal à $\lambda_1(t) = 0,00001$ pannes/heure.

Le taux de défaillance des amortisseurs des trains arrières est égal à $\lambda_2(t) = 0,00005$ pannes/heure.

L'avion a un problème d'atterrissage si les deux amortisseurs de l'un des trains sont défaillants.

- 1) Dessiner le graphique du système.
- 2) Déterminer la fiabilité de l'avion lors d'un atterrissage, en supposant que les défaillances éventuelles des amortisseurs sont indépendantes entre amortisseurs.
- 3) La calculer pour 10 000 heures.

Exercice 6

Comme chacun sait, l'airbus A340 possède 4 réacteurs. Pour que l'airbus puisse voler dans des conditions acceptables (sous-entendu, hors situation d'atterrissage forcé), il faut qu'au moins 2 réacteurs fonctionnent.

- 1) Supposons dans un premier temps que les 4 réacteurs ont le même taux de défaillance $\lambda(t) = 2.10^{-4}$ pannes/heure. Déterminer la fiabilité du système des réacteurs, pour un vol sans atterrissage forcé.
- 2) Supposons qu'un des réacteurs tombe en panne au décollage de l'avion, quelle est alors la nouvelle fiabilité du système?
- 3) Reprendre la question 2 avec les taux de défaillance suivants (pour les 3 réacteurs qui restent) :

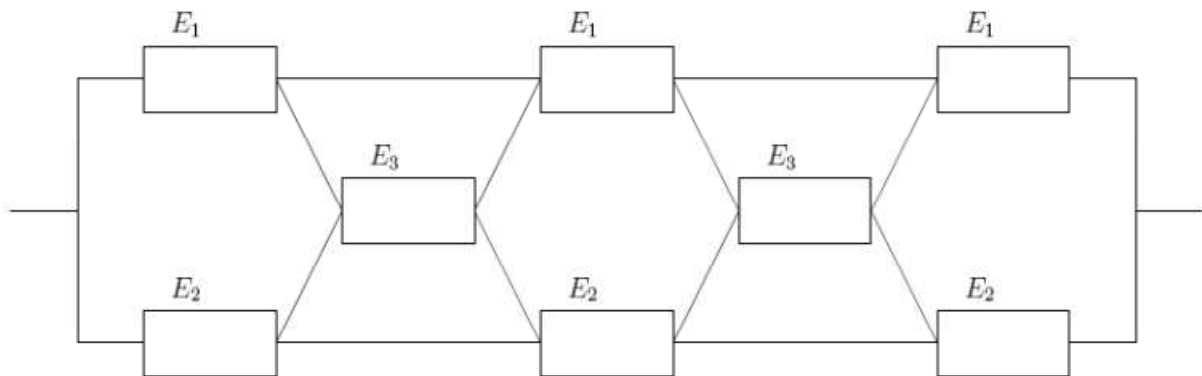
$$\lambda_1(t) = 10^{-4} \text{ pannes/heure,}$$

$$\lambda_2(t) = 2.10^{-4} \text{ pannes/heure,}$$

$$\lambda_3(t) = 4.10^{-4} \text{ pannes/heure.}$$

Exercice 7

Un système électronique est constitué d'éléments E_1, E_2 et E_3 , de fiabilité R_1, R_2 et R_3 . Soit le diagramme de fiabilité suivant (tous les éléments sont indépendants) :



Déterminer la fiabilité du système en fonction de R_1, R_2 et R_3 .

Annexe 9 : TD n°7

Exercice 1

Soient des éléments irréparables de taux de défaillance constant égal à $\lambda = 10^{-4}$ pannes/heure.

- 1) Calculer la fiabilité d'un système comportant un seul de ces éléments pour $t = 1000$ heures.
- 2) Le système comporte maintenant un élément de secours (pris parmi les éléments irréparables précédents). Après avoir donné la forme de la densité du temps de bon fonctionnement du système, déterminer la fiabilité du système.
Calculer alors la fiabilité du système pour $t = 1000$ heures.
- 3) Reprendre les deux questions précédentes pour $t = 10000$ heures.
- 4) Calculer la fiabilité du système s'il comporte deux éléments de secours, pour $t = 1000$ heures puis pour $t = 10000$ heures.

Exercice 2

Après avoir observé la durée de vie des ILS, on a conclu que le temps de bon fonctionnement suivait une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,007$ pannes/jour.

- 1) En utilisant la loi de N_t , calculer la probabilité qu'il n'y ait aucune défaillance sur une période d'un an.
- 2) Calculer la probabilité qu'il y ait deux défaillances sur la même période.

Exercice 3

Nous avons observé les durées de vie de composants électroniques, intervenant dans la fabrication des serveurs STPV. Nous avons conclu que le temps de bon fonctionnement suivait une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,06$ pannes/mois.

- 1) Calculer la probabilité qu'il y ait deux défaillances en 100 mois sachant qu'il y en a eu une dans les 20 premiers mois.
- 2) Calculer la probabilité qu'il y ait une défaillance entre un et deux ans sachant qu'il n'y en a eu aucune pendant un an et demi.
- 3) Calculer la probabilité qu'il y ait deux défaillances entre un et deux ans sachant qu'il y en a eu une pendant les 17 premiers mois.