Exos AL3 - Réduction des endomorphismes

Exercice 1
Déterminer les éléments propres des matrices suivantes, et les diagonaliser ou les trigonaliser, lorsque cela est possible :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 \\ -6 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & -12 & -3 \end{pmatrix}; \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}; \qquad E = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \qquad F = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2
Montrer que les matrices M et T sont semblables dans les cas suivants :

1. $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **2.** $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 4 \\ -3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Exercice 3
Donner une forme explicite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 1; u_1 = 0; u_2 = 2 \qquad \text{et} \qquad (\mathcal{R}) : \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = 6u_{n+2} - 11u_{n+1} + 6u_n.$$

Exercice 4
On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}, (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

$$u_0 = v_0 = w_0 = 1, \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N} : \begin{cases} u_{n+1} = -v_n + w_n \\ v_{n+1} = -u_n + w_n \\ w_{n+1} = u_n + v_n \end{cases}.$$

Donner une forme explicite pour chacune de ces suites.

Exercice 5
Dans chaque cas suivants, vérifier que l'application donnée est un endomorphisme, puis en déterminer les éléments propres.

1. $\Delta : \left| \begin{array}{cl} \mathbb{K}^{\mathbb{N}} & \to \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \\ (u_n) & \mapsto (u_{n+1}) \end{array} \right.$

2. $D : \left| \begin{array}{rl} C^\infty(\mathbb{R}) & \to C^\infty(\mathbb{R}) \\ f & \mapsto f'' \end{array} \right.$

3. $f : \left| \begin{array}{rl} \mathbb{R}[X] & \to \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto (X^3 + X)P' - (3X^2 - 1)P \end{array} \right.$

Exercice 6
Soient $E = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $f : E \to E$ qui transforme une suite $u = (u_n)$ de E en $v = (v_n)$ telle que :

$$v_0 = u_0, \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \frac{u_n + u_{n-1}}{2}.$$

Déterminer les valeurs propres de f.

Exercice 7
Soit $E = C^0([0; +\infty[, \mathbb{R})$. Pour tout fonction $f \in E$, on définit $T(f) : [0; +\infty[\to \mathbb{R}$ par :

$$T(f)(0) = f(0) \qquad \text{et} \qquad \forall x > 0, T(f)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$$

Montrer que $T \in \mathcal{L}(E)$, et en déterminer les éléments propres.

Exercice 8
On considère la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), n \geq 2$$

1. Déterminer les valeurs propres de M.
2. M est-elle diagonalisable ?

Exercice 9
Pour quelle(s) valeur(s) de a la matrice suivante est-elle diagonalisable ?

$$M = \begin{pmatrix} a-2 & 5-a & -a \\ -a & a-2 & a \\ -5 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 10
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que rg(A)=1. Montrer que

$$A \text{ est diagonalisable} \Leftrightarrow \mathrm{tr}(A) \neq 0$$

Exercice 11
Déterminer les endomorphismes $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $u^3 = u$ et tr(u)=3.

Exercice 12
Trouver une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telle que $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 13
Trouver toutes les matrices $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ diagonalisables dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que :

$$A^3 + 2A = 3I_n$$