Exos AL6 - Matrices symétriques - Coniques

Exercice 1

1. Montrer que les matrices symétriques et orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont les matrices des symétries orthogonales d'un espace euclidien de dimension n.

2. Reconnaître l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini dans la base canonique par :

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{1}{7}(-2x+6y-3z) \\ \dfrac{1}{7}(6x+3y+2z) \\ \dfrac{1}{7}(-3x+2y+6z) \end{cases}$$

Exercice 2

Soient E un espace euclidien et p un projecteur de E.
Montrer que p est orthogonal si, et seulement si la matrice de p est symétrique.

Exercice 3

On note :

$$\mathcal{S}_n^+ = \left\{S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) / \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^tXSX \geq 0\right\}, \text{ et}$$
$$\mathcal{S}_n^{++} = \left\{S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) / \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) - \{0\}, {}^tXSX > 0\right\}.$$

1. Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ Montrer que :

a. $\left(S \in \mathcal{S}_n^+ \Leftrightarrow \operatorname{Spec}(S) \subset \mathbb{R}^+\right)$ et $\left(S \in \mathcal{S}_n^{++} \Leftrightarrow \operatorname{Spec}(S) \subset \mathbb{R}_+^*\right)$;

b. $S \in \mathcal{S}_n^+ \Leftrightarrow \exists R \in \mathcal{S}_n^+, S = R^2$;

c. Montrer que $S \in \mathcal{S}_n^+ \Rightarrow \det(\mathrm{I}_n + S) \geq 1$.

2. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $S = {}^tAA$

a. Montrer que $S \in \mathcal{S}_n^+$.

b. Montrer que $S \in \mathcal{S}_n^{++} \Leftrightarrow A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 4

Déterminer la nature des coniques suivantes, en donner les éléments caractéristiques et les représenter.

1. $2x^2 + y^2 + 4x + 2y - 1 = 0$

2. $3x^2 - 2y^2 + 6x - 2y = 0$

3. $x^2 + 2xy + y^2 - 2x + 2y - 1 = 0$

4. $xy + 3x + y - 1 = 0$

5. $7x^2 - 2\sqrt{3}xy + 5y^2 = 1$

6. $3x^2 - 4xy + y = 0$