Exos Géom 2 - Etude des courbes planes

Exercice 1
Montrer que les courbes C et Γ de représentations paramétriques :

$$C : \left\{ \begin{array}{l} x(t) = 3t^2 + 1 \\ y(t) = 2t^3 + 1 \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad \Gamma : \left\{ \begin{array}{l} x(u) = 4u^3 \\ y(u) = 3u^4 \end{array} \right.$$

sont tangentes et déterminer leur(s) point(s) de contact.

Exercice 2
On considère la courbe Γ définie par la représentation paramétrique :

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t) = t^2 \\ y(t) = \dfrac{2}{3}(2t+1)^{\frac{3}{2}} \end{array} \right. , t \in \mathbb{R}.$$

1. Calculer l'abscisse curviligne en tout point $M(t)$ de Γ en prenant pour origine des abscisses curvilignes le point de Γ correspondant à $t = 0$.

2. Calculer la longueur de la partie de Γ correspondant à $t \in [2; 4]$.

Exercice 3
Calculer la longueur de l'arc paramétré Γ dans les cas suivants :

1. Γ est l'astroïde de représentation paramétrique $\left\{ \begin{array}{l} x(t) = a\cos^3 t \\ y(t) = a\sin^3 t \end{array} \right.$ $t \in \mathbb{R}$,($a > 0$ donné).

2. Γ est l'arche de cycloïde de représentation paramétrique : $\left\{ \begin{array}{l} x(t) = t - \sin t \\ y(t) = 1 - \cos t \end{array} \right.$ $t \in [0; 2\pi]$.

3. Γ est la cardioïde de représentation paramétrique : $\left\{ \begin{array}{l} x(t) = 2\cos(t) + \cos(2t) \\ y(t) = 2\sin(t) + \sin(2t) \end{array} \right.$ $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 4
Calculer le rayon de courbure en tout point $M(t)$ de l'arc paramétré défini par :

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t) = \cos^2 t + \ln(\sin t) \\ y(t) = \sin t \, \cos t \end{array} \right. \quad t \in \left]\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right[$$

Exercice 5
Trouver le point de la courbe d'équation cartésienne $y = \ln x$ en lequel la valeur absolue du rayon de courbure est minimum.

Exercice 6
Pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$, on note Γ_λ la courbe d'équation cartésienne $y = \lambda x \mathrm{e}^{-x}$.
Quel est le lieu des centres de courbure C_λ en O à Γ_λ quand λ décrit $\mathbb{R}^*$?

Exercice 7

1. Calculer la courbure pour la branche d'hyperbole d'équation $y = \dfrac{1}{x}$, avec $x > 0$.

2. En quel(s) point(s) est-elle maximale ?

Exercice 8
Soit une fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^∞. On considère la courbe Γ de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x(t) = \displaystyle\int_0^t \varphi(u) \cos u \mathrm{d}u \\ y(t) = \displaystyle\int_0^t \varphi(u) \sin u \mathrm{d}u \end{cases}.$$

1. Caractériser les points stationnaires de Γ.

2. En supposant que φ ne s'annule pas, calculer le rayon courbure en tout point $M(t)$ de Γ, en fonction de φ.

Exercice 9
On considère la spirale S de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x(t) = \mathrm{e}^{-t} \cos t \\ y(t) = \mathrm{e}^{-t} \sin t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

1. Calculer la longueur de S.

2. Calculer le rayon de courbure en tout point de S.

Exercice 10
Déterminer la développée des courbes suivantes :

1. $\begin{cases} x(t) = \cos t + \ln \left|\tan \dfrac{t}{2}\right| \\ y(t) = \sin t \end{cases}, t \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[.$

2. $\begin{cases} x(t) = t - \sin t \\ y(t) = 1 - \cos t \end{cases}, t \in]0, 2\pi[$

Exercice 11
On considère la courbe Γ d'équation cartésienne $y = x^3$.

1. Déterminer une représentation paramétrique de la développée Γ_1 de Γ.

2. Tracer Γ et Γ_1 dans un même repère.

Exercice 12
On considère la courbe Γ d'équation cartésienne $y = -\ln(\cos x)$, $x \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right[$.

1. Déterminer une représentation paramétrique de la développée Γ_1 de Γ.

2. Déterminer une représentation paramétrique de la développée Γ_2 de Γ_1.

3. Tracer Γ, Γ_1, et Γ_2 sur un même repère.