Exos Géom 3 - Courbes et surfaces de l'espace

Exercice 1
Montrer que les courbes paramétrées suivantes sont planes, et former une équation cartésienne des plans qui les contiennent :

1. $\Gamma_1 : \begin{cases} x(t) = t + 1 + \dfrac{1}{t} \\ y(t) = 2t - \dfrac{1}{t} \\ z(t) = 4t + 1 + \dfrac{1}{t} \end{cases}, t \in \mathbb{R}^*$ **2.** $\Gamma_2 : \begin{cases} x(t) = \cos\left(t - \dfrac{\pi}{3}\right) \\ y(t) = \cos t \\ z(t) = \cos\left(t + \dfrac{\pi}{3}\right) \end{cases}$ **3.** $\Gamma_3 : \begin{cases} x(t) = \dfrac{t-1}{t} \\ y(t) = \dfrac{t+1}{t-1} \\ z(t) = \dfrac{1}{t^2 - t} \end{cases}, t \in \mathbb{R}^* - \{1\}$

Exercice 2
Former une équation cartésienne du plan tangent en $A(u = 1, v = -1)$ à la surface paramétrée par :

$$\begin{cases} x(u,v) = u^3 + uv + 1 \\ y(u,v) = v^3 - u^2 v + 1 \\ z(u,v) = 5v^2 + u \end{cases} \qquad (u,v) \in \mathbb{R}^2$$

Exercice 3
Soit Γ la courbe paramétrée de l'espace de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{t} + \ln(2+t) \\ y(t) = t + \dfrac{1}{t} \\ z(t) = \dfrac{1}{t} \end{cases}$$

Déterminer les projections orthogonales de Γ sur les trois plans de coordonnées.

Exercice 4
Déterminer les projections orthogonales sur les trois plans de coordonnées de la courbe Γ d'équations :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + z^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Exercice 5
Montrer qu'il existe un unique point $M(t)$ de l'arc paramétré défini par :

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^2 \\ z(t) = t^3 + 1 \end{cases}$$

en lequel la tangente est parallèle au plan d'équation cartésienne $4x + 6y + 3z = 0$, et déterminer les coordonnées de ce point.

Exercice 6
Existe-t-il un point de la surface Σ d'équation cartésienne $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ en lequel la normale soit dirigée par le vecteur $\vec{u}(1; 2; 3)$? par le vecteur $\vec{v}(3; 2; 1)$?

Exercice 7
On note Σ la surface d'équation cartésienne :

$$x^3 + y^3 + z^3 = 1.$$

1. Déterminer les droites tracées sur Σ.
2. Montrer que ces droites sont situées dans un même plan que l'on déterminera.
3. Quel est le plan tangent à Σ en chacun des points d'intersection de ces droites deux à deux ?

Exercice 8
Déterminer toutes les droites tracées sur la surface d'équation cartésienne :

$$2x + y^2 - z^2 = 0.$$

Exercice 9
On considère la surface Σ d'équation cartésienne :

$$z = \frac{2xy}{x^2 + y^2}.$$

1. Montrer que Σ est une surface réglée.
2. Montrer que Σ est régulière, et déterminer l'équation du plan Π tangent à Σ au point A de coordonnées $\left(1; \sqrt{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
3. Montrer que l'intersection de Σ et Π est la réunion de la droite d'équations $\begin{cases} y = \sqrt{3}x \\ z = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ et d'une ellipse.

Exercice 10
Soit $\mathscr{C}$ la courbe d'équations $\begin{cases} x + z = 2 \\ x^2 - y^2 = 2z \end{cases}$

1. Déterminer la projection de $\mathscr{C}$ sur le plan (xOy), et la représenter.
2. Donner une équation cartésienne du cylindre S de directrice $\mathscr{C}$ et dont les génératrices sont parallèles à la droite d'équations $\begin{cases} x + y - z + 2 = 0 \\ 2x + 4y - z + 1 = 0 \end{cases}$
3. Donner une équation cartésienne de la surface Σ de révolution engendrée par la rotation de $\mathscr{C}$ autour de l'axe (Oz).
4. Déterminer une méridienne de Σ et la tracer.
5. Déterminer une parallèle de Σ et la tracer.

Exercice 11
Donner une équation de la surface de révolution engendrée par la rotation du cercle contenu dans le plan (xOy), de centre $A(1; 0; 0)$ de rayon 1 autour de la droite Δ d'équations : $\begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases}$.

Exercice 12
Soit $\mathscr{C}$ la courbe d'équations : $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x^2 - y^2 = 1 \end{cases}$.
Donner un équation cartésienne du cône de directrice $\mathscr{C}$ et de sommet $A(1, 1, 0)$.