Exos Probas 1 - Espaces probabilisés

Exercice 1
Soient $\mathcal{T}$ une tribu sur un ensemble Ω, et Ω' une partie de Ω.
Montrer que $\mathcal{T}' = \{A \cap \Omega' / A \in \mathcal{T}\}$ est une tribu sur Ω'.

Exercice 2
Soit Ω un ensemble non dénombrable. On note : $\mathcal{T} = \{A \subset \Omega / A$ ou $\overline{A}$ est au plus dénombrable$\}$.

1. Montrer que $\mathcal{T}$ est une tribu sur Ω.

2. Pour $A \in \mathcal{T}$, on pose : $\mathbb{P}(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A \text{ est au plus dénombrable} \\ 1 & \text{si } \overline{A} \text{ est au plus dénombrable} \end{cases}$.
Montrer que $\mathbb{P}$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{T})$.

Exercice 3
Soient Ω et E deux ensembles non vides, $f : E \to \Omega$ une application.

1. On considère une tribu $\mathcal{T}$ sur Ω.
Montrer que : $\mathcal{U} = \{f^{-1}(A) / A \in \mathcal{T}\}$ est une tribu sur E.

2. Montrer que l'image de la tribu $\mathscr{P}(E)$ par f n'est pas toujours une tribu sur Ω.

Exercice 4
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement décroissante de réels positifs de limite nulle.
Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ (et le déterminer) qui permette de définir une probabilité $\mathbb{P}$ sur $\mathbb{N}$ par : $\mathbb{P}(\{n; n+1; ...\}) = \lambda a_n$.

Exercice 5
On munit $\mathbb{N}$ de la probabilité : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(\{n\}) = 2^{-n-1}$.
Les événements $2\mathbb{N}$ et $3\mathbb{N}$ sont-ils indépendants ?

Exercice 6
Deux joueurs A et B lancent à tour de rôle une pièce truquée. Le joueur A commence et la pièce amène *Face* avec la probabilité $p \in]0; 1[$.
Le premier qui obtient *Face* gagne le jeu, qui s'arrête alors.

1. Quelle est la probabilité que A gagne lors de son n-ième lancer ?

2. Quelle est la probabilité que A gagne le jeu ?

3. Y a-t-il une valeur de p qui assure que les deux joueurs aient la même probabilité de gagner ?

Exercice 7
Le joueur JF joue contre le joueur JP avec une pièce équilibrée.
Si la fréquence FF est observée avant la fréquence PF, alors le joueur JF gagne. Si c'est la fréquence PF qui est observée en premier, alors le joueur JP gagne.

1. Justifier que la probabilité que personne ne gagne est nulle.

2. En considérant les résultats des deux premiers lancers, montrer que JP a la plus grande probabilité de l'emporter, et la déterminer.

Exercice 8

On lance (une seule fois) une pièce équilibrée, puis on effectue des tirages successifs dans une urne contenant initialement une boule blanche et une boule noire selon le protocole suivant :

· On tire une boule, on note sa couleur, on la remet dans l'urne ;

· Si on avait obtenu *Pile* on rajoute une boule blanche dans l'urne, sinon on rajoute une boule noire.

1. Calculer la probabilité de tirer une boule blanche au k-ième tirage.

2. Sachant que l'on a tiré une boule blanche au k-ième tirage, calculer la probabilité d'avoir obtenu *Pile*.

3. Calculer la probabilité d'obtenir k boules blanches lors des k premiers tirages.

Exercice 9

Soient $N \in \mathbb{N}^*, p \in]0;1[, p \neq \dfrac{1}{2}$. On joue à un jeu de pile ou face avec une pièce truquée, la probabilité d'obtenir *Pile* étant p.

A chaque jet, si l'on obtient *Pile* on gagne 1 €, sinon on perd 1€. On suppose que l'on ne peut jouer que si l'on dispose d'au moins 1 €.

Le jeu s'arrête soit lorsque l'on possède N€, soit lorsque l'on ne possède plus rien.

Au départ, on dispose de n € $(0 \leq n \leq N)$; on note $p_N(n)$ la probabilité de gagner la partie.

1. Déterminer une relation entre $p_N(n), p_N(n+1)$ et $p_N(n-1)$.

2. Exprimer $p_N(n)$ en fonction de n, N et p, puis calculer $\lim\limits_{N \to +\infty} p_N(n)$.

Exercice 10

Dans une population, la probabilité qu'une famille ait n enfants est estimée par la valeur :

$$p_n = \frac{2^n}{n!}\mathrm{e}^{-2}$$

On suppose qu'au sein d'une même famille les naissances sont indépendantes, et qu'il y a équiprobabilité sur le sexe de l'enfant.

1. Calculer la probabilité qu'une famille ait au moins une fille.

2. On suppose qu'une famille a une seule fille. Quelle est la probabilité que la famille comporte deux enfants ?

3. Quelle est la probabilité qu'une famille ait exactement k filles ?

Exercice 11

Pour $s > 1$, on définit le réel $\zeta(s)$ par : $\zeta(s) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s}$.

1. Montrer que l'on peut définir une probabilité sur $\mathbb{N}^*$ à l'aide de l'application $\mathbb{P}$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(\{n\}) = \dfrac{1}{\zeta(s)n^s}$. (*Loi de Zipf de paramètre* s)

2. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, exprimer simplement la probabilité de l'événement $A_p = \{n \in \mathbb{N}^*/p|n\}$.

3. On note $\mathscr{P}$ l'ensemble des nombres premiers. Vérifier que la famille $(A_p)_{p\in\mathscr{P}}$ est constituée d'événements mutuellement indépendants.

4. En étudiant $\mathbb{P}(\{1\})$, établir :

$$\zeta(s) = \prod_{p\in\mathscr{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$