

## CHAP 6 - SUITES NUMERIQUES

### 1 Propriété fondamentale de $\mathbb{R}$

#### Définition 1

Soit  $A$  une partie non vide de  $\mathbb{R}$ .

- On dit que  $M$  est une **borne supérieur** de  $A$  si

$$\begin{cases} \forall x \in A, x \leq M \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, M - \varepsilon < x \leq M \end{cases}$$

- On dit que  $m$  est une **borne inférieure** de  $A$  si

$$\begin{cases} \forall x \in A, x \geq m \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, m \leq x < m + \varepsilon \end{cases}$$

#### Proposition 1

- Si une partie  $A$  de  $\mathbb{R}$  admet une borne supérieure, elle est unique ;  $A$  est alors majorée, et sa borne supérieure est le plus petit des majorants, noté  $\sup(A)$ .
- Si une partie  $A$  de  $\mathbb{R}$  admet une borne inférieure, elle est unique.  $A$  est alors minoré et sa borne inférieure est le plus grand des minorants, noté  $\inf(A)$ .

#### Théorème 1

Toute partie non vide majorée (resp. minorée) de  $\mathbb{R}$  admet une borne supérieure (resp. inférieure).

#### Remarque 1

Si  $A$  est une partie non vide et non majorée de  $\mathbb{R}$  on convient que  $\sup(A) = +\infty$ .

## 2 Généralités sur les suites

### 2.1 Définitions

#### Définition 2

Une **suite réelle** (resp. **suite complexe**) est une fonction  $u$  réelle (resp. complexe) définie sur une partie infinie  $D$  de  $\mathbb{N}$ .

On note  $u(n) = u_n$ , qui se lit " $u$  indice  $n$ ". On dit que  $u_n$  est le **terme général** de la suite, ou le **terme de rang  $n$** . La suite elle même se note  $(u_n)_{n \in D}$  ou  $(u_n)$  lorsque  $D = \mathbb{N}$ .

Il existe plusieurs modes de définition d'une suite notamment :

- ✓ **Forme explicite** :

Une suite est définie **explicitement** lorsque son terme général est exprimé en fonction de  $n$

#### Exemple 1

$$u_n = \frac{n}{1+n^2}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

- ✓ **Forme récurrente** :

Une suite est définie **par récurrence** lorsque l'on donne son (ou ses) premier(s) terme(s) et que l'on exprime un terme général à l'aide de termes de rangs inférieurs. Cette expression s'appelle **relation de récurrence**.

#### Exemple 2

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = nu_n^2 + 1, \forall n \geq 0 \end{cases} \quad \text{qui s'écrit aussi : } \begin{cases} u_0 = 2 \\ u_n = (n-1)u_{n-1}^2 + 1, \forall n \geq 1 \end{cases} \\ \text{(b)} \quad & \begin{cases} u_0 = 1, u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_n + u_{n+1}, \forall n \geq 0 \end{cases} \quad \text{qui s'écrit aussi : } \begin{cases} u_0 = 1, u_1 = 1 \\ u_n = u_{n-2} + u_{n-1}, \forall n \geq 2 \end{cases} \end{aligned}$$

**Définition 3**

On dit qu'une suite réelle est **majorée** (resp. **minorée**) s'il existe un réel  $M$  supérieur (resp. inférieur) à tous les termes de la suite.

Une suite qui est majorée et minorée est dite **bornée**.

**Remarque 2**

Une suite réelle  $(u_n)_{n \in D}$  est bornée, si et seulement si la suite  $(|u_n|)_{n \in D}$  est majorée.

**Définition 4**

Soit  $(u_n)$  une suite. On dit que la suite  $(v_n)$  est une **suite extraite** de  $(u_n)$  (également appelée **sous-suite**), s'il existe une application  $\varphi$  définie sur  $\mathbb{N}$  et à valeurs dans  $\mathbb{N}$ , strictement croissante, telle que pour tout  $n$ ,  $v_n = u_{\varphi(n)}$ .

**Exemple 3**

Lorsque  $\varphi : n \mapsto 2n$ , la suite extraite  $(u_{2n})$  est la suite extraite de  $(u_n)$  des termes de rangs pairs.

**2.2 Exemples de suites récurrentes****2.2.1 Suites arithmétiques****Définition 5**

Une suite  $(u_n)$  est dite **arithmétique** lorsqu'il existe un nombre  $r$ , appelé **raison**, tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r$$

**Proposition 2**

$(u_n)$  est une suite arithmétique de raison  $r$  et de terme initial  $u_{n_0}$  si, et seulement si

$$\forall n \geq n_0, u_n = u_{n_0} + (n - n_0)r$$

**Proposition 3**

Si  $(u_n)_{n \in D}$  est une suite arithmétique, alors pour tout  $(n_0, n) \in D^2$  tel que  $n \geq n_0$  on a :

$$\sum_{k=n_0}^n u_k = (n - n_0 + 1) \frac{u_{n_0} + u_n}{2}$$

**Exemple 4**

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

**2.2.2 Suites géométriques****Définition 6**

Une suite  $(u_n)$  est dite **géométrique** lorsqu'il existe un nombre  $q$ , appelé **raison**, tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = q u_n$$

**Proposition 4**

$(u_n)$  est une suite géométrique de raison  $q$  et de terme initial  $u_{n_0}$  si, et seulement si

$$\forall n \geq n_0, u_n = u_{n_0} q^{n-n_0}$$

**Proposition 5**

Si  $(u_n)_{n \in D}$  est une suite géométrique de raison  $q \neq 1$ , alors pour  $(n_0, n) \in D^2$  tel que  $n \geq n_0$  on a :

$$\sum_{k=n_0}^n u_k = u_{n_0} \frac{1 - q^{n-n_0+1}}{1 - q}$$

### 2.2.3 Suites arithmético-géométriques

#### Définition 7

Une suite  $(u_n)$  est dite **suite arithmético-géométrique** s'il existe  $(a, b) \in \mathbb{C}^2, a \neq 1$  tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b$$

#### Proposition 6

Soit  $(u_n)$  une suite arithmético-géométrique telle que pour  $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b$ .

Si  $l$  est tel que  $l = al + b$ , alors la suite  $(u_n - l)$  est une suite géométrique de raison  $a$ .

### 2.2.4 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

#### Définition 8

Une suite  $(u_n)$  est dite **suite récurrente linéaire d'ordre 2** s'il existe  $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$  tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

On appelle **équation caractéristique** associée l'équation

$$r^2 = ar + b$$

#### Proposition 7

Soit  $(u_n)$  une suite réelle récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique  $(EC) : r^2 = ar + b$ .

$\rightsquigarrow$  Si  $(EC)$  admet deux solutions réelles distinctes  $r_1$  et  $r_2$ , alors il existe  $(A, B) \in \mathbb{R}^2$  tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = Ar_1^n + Br_2^n$$

$\rightsquigarrow$  Si  $(EC)$  admet une unique solution réelle  $r_0$ , alors il existe  $(A, B) \in \mathbb{R}^2$  tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (An + B)r_0^n$$

$\rightsquigarrow$  Si  $(EC)$  admet deux solutions complexes conjuguées  $re^{\pm i\theta}$ , alors il existe  $(A, B) \in \mathbb{R}^2$  tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = r^n (A \cos(n\theta) + B \sin(n\theta))$$

## 2.3 Représentation graphique d'une suite

- Pour **représenter** une suite réelle  $(u_n)_{n \in D}$ , on place dans un repère les points de coordonnées  $(n, u_n)$  pour  $n \in D$ .

On obtient ainsi un **nuage de points**.

- Pour **construire** une suite récurrente  $(u_n)$  définie par son terme initial et la relation de récurrence  $u_{n+1} = f(u_n)$  :

$\rightsquigarrow$  On trace dans un repère la courbe  $C_f$  représentative de  $f$  et la droite  $\Delta$  d'équation  $y = x$ .

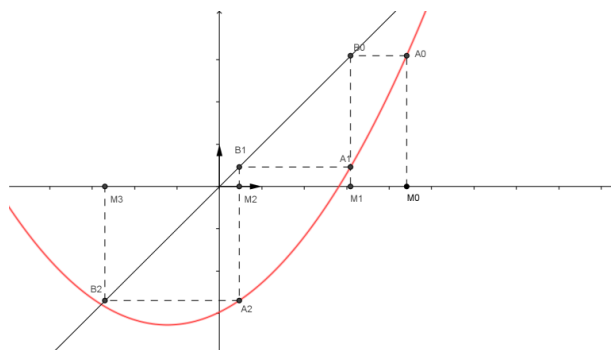
$\rightsquigarrow$  On place le point  $M_0(u_0, 0)$ , puis on place sur  $C_f$  le point  $A_0$  d'abscisse  $u_0$  (ses coordonnées sont  $(u_0, u_1)$  car  $f(u_0) = u_1$ );

$\rightsquigarrow$  On place le point  $B_0$  de  $\Delta$  ayant la même ordonnée que  $A_0$  (ses coordonnées sont donc  $(u_1, u_1)$ );

$\rightsquigarrow$  On projette  $B_0$  sur l'axe des abscisses on obtient le point  $M_1(u_1, 0)$ ;

$\rightsquigarrow$  On réitère le procédé précédent en partant de  $M_1$  pour obtenir  $M_2(u_2, 0)$  et ainsi de suite.

On obtient ainsi des points sur l'axe des abscisses dont les abscisses sont les termes de la suite.



## 2.4 Variations

### 2.4.1 Définitions

#### Définition 9

On dit qu'une suite  $(u_n)$  est :

- **stationnaire**, si

$$\exists n_0, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0) \Rightarrow (u_n = u_{n_0})$$

- **croissante** (resp. **décroissante**), si

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq u_n \quad (\text{resp. } u_{n+1} \leq u_n)$$

- **strictement croissante** (resp. **strictement décroissante**), si

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} > u_n \quad (\text{resp. } u_{n+1} < u_n)$$

- **monotone** si elle est croissante ou décroissante.

### 2.4.2 Techniques pour étudier les variations d'une suite

(a) Si la suite est définie explicitement à l'aide d'une fonction  $f$ , c'est-à-dire pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = f(n)$ , on étudie les variations de  $f$  sur  $\mathbb{R}^+$ .

(b) On étudie le signe de  $u_{n+1} - u_n$ .

(c) Si les termes de la suite sont strictement positifs, on compare  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  et 1.

#### Proposition 8

Soient  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$ , telle que  $f(I) \subset I$  (on dit que  $I$  est **stable** par  $f$ ), et  $(u_n)$  une suite définie par son terme initial  $u_0 \in I$  et la relation de récurrence  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

Si  $f$  est croissante sur  $I$ , alors la suite  $(u_n)$  est monotone et on a :

$\rightsquigarrow (u_n)$  croissante si  $u_1 - u_0 \geq 0$ ;

$\rightsquigarrow (u_n)$  décroissante si  $u_1 - u_0 \leq 0$ ;

#### Remarque 3

Si  $f$  est décroissante, la suite  $(u_n)$  n'est pas monotone, mais les suites extraites  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$  le sont.

### 3 Limite d'une suite

#### 3.1 Définitions

##### Définition 10

On dit qu'une suite réelle  $(u_n)$  a pour **limite** le réel  $l$ , ou que la suite  $(u_n)$  **converge** vers  $l$  si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0) \Rightarrow (|u_n - l| \leq \varepsilon)$$

Toute suite qui admet une limite réelle est dite **convergente** ; toute suite qui ne converge pas est dite **divergente**.

##### Proposition 9

Si  $(u_n)$  converge vers un réel  $l$ , alors la suite  $(|u_n|)$  converge vers  $|l|$ .

##### Remarque 4

La réciproque est fausse.

##### Définition 11

On dit qu'une suite complexe  $(u_n)$  est convergente, si les suites  $(\operatorname{Re}(u_n))$  et  $(\operatorname{Im}(u_n))$  le sont.

Si  $(\operatorname{Re}(u_n))$  admet pour limite  $x$  et  $(\operatorname{Im}(u_n))$  admet pour limite  $y$  alors on dit que  $(u_n)$  admet pour limite  $x + iy$ .

##### Définition 12

On dit qu'une suite réelle  $(u_n)$  a pour **limite**  $+\infty$  si

$$\forall A \in \mathbb{R}_+, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0) \Rightarrow (u_n \geq A)$$

On dit qu'une suite réelle  $(u_n)$  a pour **limite**  $-\infty$  si la suite  $(-u_n)$  a pour limite  $+\infty$ .

##### Remarque 5

(a) Une suite qui a pour limite  $+\infty$  ou  $-\infty$  est divergente.

(b) Si une suite a pour limite  $+\infty$  (resp.  $-\infty$ ), elle n'est pas majorée (resp. minorée).

#### 3.2 Propriétés des suites convergentes

##### Proposition 10

Si une suite réelle admet une limite, finie ou infinie, cette limite est unique.

On la note  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .

##### Remarque 6

Si une suite complexe admet une limite, alors elle est unique.

##### Proposition 11

Toute suite convergente est bornée.

##### Proposition 12

Si  $(u_n)$  converge vers  $l > 0$ , alors il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq n_0$ ,  $u_n > 0$ .

##### Proposition 13

Si  $(u_n)$  a pour limite  $l$  (réel, ou  $+\infty$ , ou  $-\infty$ ) alors toute suite extraite a pour limite  $l$ .

##### Remarque 7

La contraposée de cette propriété peut-être utilisée pour montrer qu'une suite diverge.

### 3.3 Opérations sur les limites

Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites convergeant respectivement vers  $u$  et  $v$  ( $u$  et  $v$  pouvant désigner un réel,  $+\infty$  ou  $-\infty$ ).

#### Proposition 14 Somme

- $\rightsquigarrow$  Si  $u$  et  $v$  sont des réels, alors la suite  $(u_n + v_n)$  converge vers  $u + v$ .
- $\rightsquigarrow$  Si  $u$  est  $\pm\infty$  et  $v$  est réel, alors la suite  $(u_n + v_n)$  converge vers  $\pm\infty$ .
- $\rightsquigarrow$  Si  $u$  et  $v$  sont  $+\infty$  (resp.  $-\infty$ ), alors la suite  $(u_n + v_n)$  converge vers  $+\infty$  (resp.  $-\infty$ ).
- $\rightsquigarrow$  Si  $u$  et  $v$  sont respectivement  $+\infty$  et  $-\infty$ , alors on ne peut rien en dédire pour la limite de  $(u_n + v_n)$ .  
On parle alors de **forme indéterminée**.

#### Proposition 15 Produit

- $\rightsquigarrow$  Si  $u$  et  $v$  sont des réels, alors la suite  $(u_n v_n)$  converge vers  $uv$ .
- $\rightsquigarrow$  Si  $u$  est  $+\infty$  et  $v$  est un réel strictement positif (resp. strictement négatif), alors la suite  $(u_n v_n)$  converge vers  $+\infty$  (resp.  $-\infty$ ).
- $\rightsquigarrow$  Si  $u$  est  $-\infty$  et  $v$  est un réel strictement positif (resp. strictement négatif), alors la suite  $(u_n v_n)$  converge vers  $-\infty$  (resp.  $+\infty$ ).
- $\rightsquigarrow$  Si  $u$  et  $v$  sont tous les deux  $+\infty$  ou tous les deux  $-\infty$ , alors la suite  $(u_n v_n)$  converge vers  $+\infty$ .
- $\rightsquigarrow$  Si  $u$  et  $v$  sont respectivement  $+\infty$  et  $-\infty$ , alors la suite  $(u_n v_n)$  converge vers  $-\infty$ .
- $\rightsquigarrow$  Si l'une des limites est infinie et l'autre est nulle, alors on ne peut rien en déduire pour la limite de  $(u_n v_n)$ . On a une **forme indéterminée**.

#### Proposition 16 Inverse

On suppose que la suite  $(u_n)$  ne s'annule pas.

- $\rightsquigarrow$  Si  $u$  est un réel non nul, alors la suite  $\left(\frac{1}{u_n}\right)$  converge vers  $\frac{1}{u}$ .
- $\rightsquigarrow$  Si  $u$  est  $+\infty$  ou  $-\infty$ , alors la suite  $\left(\frac{1}{u_n}\right)$  converge vers 0.
- $\rightsquigarrow$  Si  $u = 0$ , alors on ne peut rien en déduire pour la limite de  $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ . On a une **forme indéterminée**.

### 3.4 Théorèmes de comparaison

#### Proposition 17

Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  des suites convergeant respectivement vers  $u$  et  $v$ .  
S'il existe un entier  $n_0$  tel que pour  $n \geq n_0$ ,  $u_n \leq v_n$  alors  $u \leq v$ .

#### Corollaire

Si une suite positive converge, sa limite est positive ou nulle.

#### Remarque 8

On ne peut pas améliorer le résultat en utilisant une inégalité stricte :  
si pour  $n \geq n_0$ ,  $u_n < v_n$  on a toujours  $u \leq v$ , mais on peut avoir  $u = v$ .

Par exemple, pour tout  $n > 0$ ,  $\frac{1}{n} > 0$  mais  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ .

On dit que l'inégalité stricte n'est pas conservée par passage à la limite.

#### Proposition 18

Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  des suites telles que pour  $n \geq n_0$ ,  $u_n \leq v_n$  alors :

- Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ .
- Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ .

**Proposition 19**

Une suite géométrique de raison  $q$  converge si, et seulement si  $q \in ]-1, 1[$ .

Si  $q = 1$  la suite est constante, si  $|q| < 1$  la limite est 0.

**Théorème 2 Théorème d'encadrement**

Soient  $(u_n)$ ,  $(v_n)$  et  $(w_n)$  des suites telles que pour  $n \geq n_0$ ,  $u_n \leq v_n \leq w_n$ .

Si  $(u_n)$  et  $(w_n)$  admettent la même limite  $l$  alors  $(v_n)$  converge vers  $l$ .

**3.5 Théorèmes de convergence****Théorème 3 Théorème de la limite monotone**

Soit  $(u_n)$  une suite croissante.

- Si  $(u_n)$  est majorée, alors elle converge vers  $l = \sup\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ .
- Si  $(u_n)$  n'est pas majorée, alors elle diverge vers  $+\infty$

**Corollaire**

Soit  $(u_n)$  une suite décroissante.

- Si  $(u_n)$  est minorée, alors elle converge vers  $l = \inf\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ .
- Si  $(u_n)$  n'est pas minorée, alors elle diverge vers  $-\infty$

**Théorème 4 Théorème du point fixe**

Soient  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  stable par  $f$  et  $(u_n)$  une suite définie par son premier terme  $u_0 \in I$  et par la relation de récurrence  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

Si  $(u_n)$  converge vers  $l$  et si  $f$  est continue en  $l$  alors  $f(l) = l$ .

**Définition 13**

On dit que deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont **adjacentes** si l'une est croissante, l'autre décroissante et si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0.$$

**Théorème 5 Théorème des suites adjacentes**

Deux suites adjacentes sont convergentes, et admettent la même limite.