TP-COURS : Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Définitions :

- On appelle **suites récurrentes linéaires du second ordre à coefficients constants** les suites (U_n) telles qu'il existe $(a\,;b) \in \left(\mathbb{R}^*\right)^2$ tel que :

  $$\forall n \in \mathbb{N} : \quad U_{n+2} = a\, U_{n+1} + b\, U_n \qquad \text{avec } U_0, U_1 \text{ réels donnés.}$$

- On appelle **équation caractéristique** associée à la suite récurrente linéaire du second ordre définie ci-dessus l'équation du second degré :

  $$\boldsymbol{x^2 = ax + b}$$

Soit (U_n) une suite récurrente linéaire du second ordre, telle que :
$\forall n \in \mathbb{N} : \quad U_{n+2} = a\, U_{n+1} + b\, U_n \qquad$ avec U_0, U_1, a, b réels donnés.
On note (E) : $x^2 = ax + b$ son équation caractéristique.

1. On suppose que (E) a 2 solutions distinctes r_1 et r_2.
Montrer que : $\exists(\lambda;\mu) \in \mathbb{R}^2 \,/\, \forall n \in \mathbb{N}, \quad U_n = \lambda\, r_1^n + \mu\, r_2^n$

2. On suppose que (E) a une unique solution r.
Montrer que : $\exists(\lambda;\mu) \in \mathbb{R}^2 \,/\, \forall n \in \mathbb{N},\ U_n = (\lambda n + \mu) r^n$.

3. On suppose que (E) a 2 solutions complexes conjuguées $r = \rho\, e^{i\theta}$ et $\overline{r}$.
Montrer que : $\exists(\lambda;\mu) \in \mathbb{R}^2 \,/\, \forall n \in \mathbb{N},\ U_n = \rho^n (\lambda \cos n\,\theta + \mu \sin n\,\theta)$.

Application :

Donner la forme explicite des suites (U_n) suivantes :

a) $\begin{cases} U_0 = U_1 = 1 \\ U_{n+2} = U_{n+1} + U_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$ (Il s'agit de la suite de Fibonacci…)

b) $\begin{cases} U_0 = 1; \quad U_1 = 1 + \sqrt{2} \\ U_{n+2} = 2U_{n+1} - 2U_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

c) $\begin{cases} U_0 = 0; \quad U_1 = 1 \\ U_{n+2} = \dfrac{-1}{4} U_n + U_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$