CB 1 - Intégrales généralisées - Sujet 1

Dans tous les exercices, on notera f la fonction intégrée. Dans tous les cas, f est continue par morceaux sur l'intervalle I précisé, donc localement intégrable sur I.

1. Donner la nature des intégrales suivantes :

a. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\tan\left(\frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x$ $\quad I = [1;+\infty[$, f est positive sur I (on a bien $\dfrac{1}{x} \in \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[$ pour $x \in I$).

En $+\infty$: $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^2}$, donc par comparaison à une intégrale de référence, $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ converge.

b. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x}$ $\quad I = \left]0;\dfrac{\pi}{2}\right]$, f est positive sur I.

En 0 : $f(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{x^2}$, donc par comparaison à une intégrale de référence, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x$ diverge.

c. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x$ $\quad I =]0;+\infty[$, f est positive sur I.

En 0 : $x^{\frac{2}{3}}f(x) \underset{0}{\sim} -\ln(x)x^{\frac{1}{6}}$ donc, par croissances comparées, $\displaystyle\lim_{x\to 0} x^{\frac{2}{3}}f(x) = 0$ et par suite, $f(x) = o_0\left(\dfrac{1}{x^{\frac{2}{3}}}\right)$; par comparaison à une intégrale de référence, $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ converge.

En $+\infty$: $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$, donc par comparaison à une intégrale de référence, $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ converge.

En conclusion, $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ converge.

d. $\displaystyle\int_0^1 \frac{(-1)^{\mathrm{E}\left(\frac{1}{x}\right)}}{\sqrt{\sin x}} \mathrm{d}x$ $\quad I =]0;1]$

En 0 : $|f(x)| \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, donc par comparaison à une intégrale de référence, $\displaystyle\int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x$ converge, donc $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ converge.

2. Après en avoir justifié l'existence, calculer les intégrales suivantes :

a. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{ch}x}$ $\qquad I = [0; +\infty[$, f positive sur I.

<u>En $+\infty$:</u> $f(x) \underset{+\infty}{\sim} 2\mathrm{e}^{-x}$, donc par comparaison à une intégrale de référence, $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ converge.

On effectue le changement de variable $t = \mathrm{e}^x$, et on obtient :
$\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t = [2\mathrm{Arctan}\, t]_1^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$.

b. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x$ $\qquad I = [1; +\infty[$, f positive sur I.

<u>En $+\infty$:</u> Par croissances comparées, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{3}{2}} f(x) = 0$ donc $f(x) = o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right)$;
par comparaison à une intégrale de référence, $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ converge.

On effectue une intégration par parties avec :
$u(x) = \ln x, v(x) = \dfrac{-1}{x}$, de classe C^1, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} u(x)v(x) = 0$ (par croissances comparées),
et on obtient : $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \left[\frac{-\ln x}{x}\right]_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \left[\frac{-1}{x}\right]_1^{+\infty} = 1$.

CB 1 - Intégrales généralisées - Sujet 2

Dans tous les exercices, on notera f la fonction intégrée. Dans tous les cas, f est continue par morceaux sur l'intervalle I précisé, donc localement intégrable sur I.

1. Donner la nature des intégrales suivantes :

a. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sqrt{1-\cos\frac{1}{x^2}}\mathrm{d}x$ $\quad I =]0;+\infty[$, f est positive sur I.

En 0 : $0 \leq f(x) \leq \sqrt{2}$ donc, par domination, $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ converge.

En $+\infty$: $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{2}x^2}$ donc, par comparaison à une intégrale de référence, $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ converge.

En conclusion, $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ converge.

b. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x}\mathrm{d}x$ $\quad I =]0;1[$, f est négative sur I.

En 0 : $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = -1$, donc par prolongement par continuité, $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\mathrm{d}x$ converge.

En 1 : $f(x) \underset{1}{\sim} \ln(1-x)$; la fonction ln est intégrable en 0, donc, par changement de variable ($t = 1-x$) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \ln(1-x)\mathrm{d}x$ converge, et par comparaison, $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)\mathrm{d}x$ converge.

En conclusion, $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ converge.

c. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}x}{(\tan x)^2}$ $\quad I = \left]0;\frac{\pi}{4}\right]$, f est positive sur I.

En 0 : $f(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{x^2}$, donc par comparaison à une intégrale de référence, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\mathrm{d}x$ diverge.

d. $\displaystyle\int_1^{+\infty} (-1)^{\mathrm{E}(x)} \sin\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ $\quad I = [1;+\infty[$

En $+\infty$: $|f(x)| \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^2}$, par comparaison à une intégrale de référence, $\displaystyle\int_1^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x$ converge, donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ converge.

2. Après en avoir justifié l'existence, calculer les intégrales suivantes :

a. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}\mathrm{d}x$ $\qquad I =]0;+\infty[$, f est positive sur I.

En 0 : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ (croissances comparées) donc f se prolonge par continuité en 0 ;
$\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ converge.

En $+\infty$: $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^2}$, donc par comparaison à une intégrale de référence, $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ converge.

En conclusion $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ converge.

En utilisant une primitive on a : $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \left[\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}\right]_0^{+\infty} = 1.$

b. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ $\qquad I = [0;+\infty[$, f positive sur I.

En $+\infty$: Par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 f(x) = 0$, donc $f(x) = o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$;
par comparaison à une intégrale de référence, $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ converge.

On effectue le changement de variable $t = \sqrt{x}$, on obtient : $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} 2t\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$;
on effectue une intégration par parties, avec :
$u(t) = t, v(t) = -2\mathrm{e}^{-t}$, de classe C^1, $\lim\limits_{t\to+\infty} (u(t)v(t)) = 0$ (par croissances comparées),
et on obtient : $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} 2t\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \left[-2t\mathrm{e}^{-t}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} 2\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = 2.$