CB n°7 - CONIQUES - COURBES PARAMETREES - SUJET 1

1. Donner la nature de la conique d'équation cartésienne

$$x^2 - 2xy + y^2 + 3\sqrt{2}x - \sqrt{2}y + 2 = 0,$$

et la représenter dans un repère orthonormé.

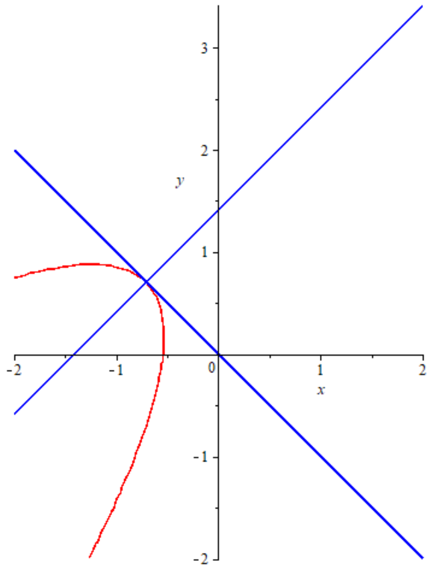
Soient $S = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $L = \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$, et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
L'équation de la conique dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ s'écrit : ${}^tXSX + LX + 2 = 0$.
La matrice S a pour déterminant 0, la conique est donc du type parabole.
0 étant une valeur propre de S, l'autre valeur propre est $\mathrm{tr}(S)$, c'est-à-dire 2.
Un vecteur propre associé à la valeur propre 2, est $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
On note $\vec{u}$ et $\vec{v}$ les vecteurs de coordonnées respectives $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, P la matrice de passage de la base $(\vec{i}, \vec{j})$ à la base $(\vec{u}, \vec{v})$, et $X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = {}^tPX$.
L'équation devient :

$${}^tX_1 \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} X_1 + LPX_1 + 2 = 0$$

c'est-à-dire que l'équation de la parabole dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ est : $2x_1^2 + 4x_1 + 2y_1 + 2 = 0$.
En écrivant $2x_1^2 + 4x_1 + 2y_1 + 2 = 2(x_1+1)^2 + 2y_1$, on en déduit que le sommet S de la parabole a pour coordonnées $(-1, 0)$, dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$, et que l'équation réduite de la parabole dans le repère $(S, \vec{u}, \vec{v})$ est

$$X^2 = -Y$$

On en déduit la courbe de la parabole :



2. Etudier et tracer la courbe admettant pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{t^3}{t-1} \\ y(t) = \dfrac{t(t-2)}{t-1} \end{cases} , \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

On a : $\begin{cases} x'(t) = \dfrac{t^2(2t-3)}{(t-1)^2} \\ y'(t) = \dfrac{t^2-2t+2}{(t-1)^2} \end{cases}$. On en déduit le tableau de variations suivant :

t	$-\infty$		0		1		$3/2$		$+\infty$
$x'(t)$		$-$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
x	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$27/4$	$\nearrow$	$+\infty$
$y'(t)$		$+$		$+$	‖	$+$		$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$-3/2$	$\nearrow$	$+\infty$

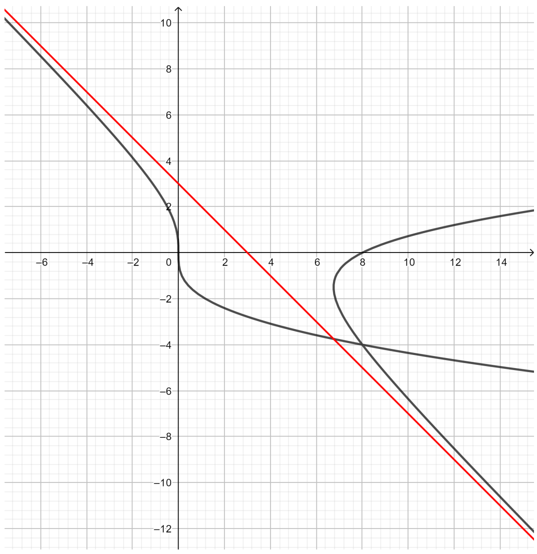
On a une tangente verticale aux points de paramètres 0 et $\dfrac{3}{2}$; il n'y a pas de point stationnaire.

Etude des branches infinies : On a, pour $t \notin \{0,1\}$, $\dfrac{y(t)}{x(t)} = \dfrac{t-2}{t^2}$.

En $\pm\infty$: $\lim\limits_{\pm\infty} \dfrac{y}{x} = 0$; on a donc une branche parabolique de direction (Ox).

En 1 : $\lim\limits_{t\to 1} \dfrac{y}{x} = -1$, et $\lim\limits_{t\to 1} y + x = 3$; on a donc une asymptote d'équation $x + y - 3 = 0$.
Comme on a : $y(t) + x(t) - 3 = (t-1)(t+3) \underset{t\to 1}{\sim} 4(t-1)$, on en déduit la position de la courbe par rapport à son asymptote.

Finalement, on obtient la courbe suivante :



CB n°7 - CONIQUES - COURBES PARAMETREES - Sujet 2

1. Donner la nature de la conique d'équation cartésienne

$$x^2 + 3y^2 - 2\sqrt{3}xy + 16y + 20 = 0,$$

et la représenter dans un repère orthonormé.

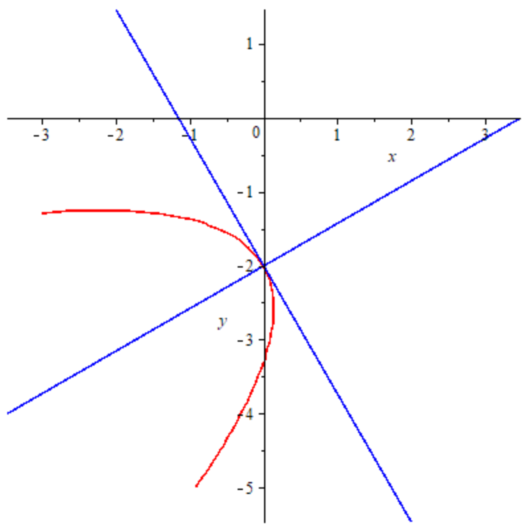
Soient $S = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 3 \end{pmatrix}$, $L = \begin{pmatrix} 0 & 16 \end{pmatrix}$, et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
L'équation de la conique dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ s'écrit : ${}^tXSX + LX + 20 = 0$.
La matrice S a pour déterminant 0, la conique est donc du type parabole.
0 étant une valeur propre de S, l'autre valeur propre est $\mathrm{tr}(S)$, c'est-à-dire 4.
Un vecteur propre associé à la valeur propre 4, est $\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$.
On note $\vec{u}$ et $\vec{v}$ les vecteurs de coordonnées respectives $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$, P la matrice de passage de la base $(\vec{i}, \vec{j})$ à la base $(\vec{u}, \vec{v})$, et $X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = {}^tPX$.
L'équation devient :

$${}^tX_1 \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} X_1 + LPX_1 + 2 = 0$$

c'est-à-dire que l'équation de la parabole dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ est : $4x_1^2 - 8\sqrt{3}x_1 + 8y_1 + 20 = 0$.
En écrivant $4x_1^2 - 8\sqrt{3}x_1 + 8y_1 + 20 = 4\left(x_1 - \sqrt{3}\right))^2 + 8(y_1 + 1)$, on en déduit que le somme S de la parabole a pour coordonnées $\left(\sqrt{3}, -1\right)$, dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$, ou encore $(0, -2)$ dans le repère initial, et que l'équation réduite de la parabole dans le repère $(S, \vec{u}, \vec{v})$ est

$$X^2 = -2Y$$

On en déduit la courbe de la parabole :



2. Etudier et tracer la courbe admettant pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{t^2-1}{t} \\ y(t) = \dfrac{(1+t)^3}{t} \end{cases} , \quad t \in \mathbb{R}^*$$

On a : $\begin{cases} x'(t) = \dfrac{t^2+1}{t^2} \\ y'(t) = \dfrac{(t+1)^2(2t-1)}{t^2} \end{cases}$. On en déduit le tableau de variations suivant :

t	$-\infty$		-1		0 ‖	‖ 0		$1/2$		$+\infty$
$x'(t)$		$+$		$+$	‖	‖	$+$		$+$	
x	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$ ‖	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$-3/2$	$\nearrow$	$+\infty$
$y'(t)$		$-$	0	$-$	‖	‖	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$ ‖	‖ $+\infty$	$\searrow$	$27/4$	$\nearrow$	$+\infty$

On a une tangente horizontale aux points de paramètres -1 et $\dfrac{1}{2}$; il n'y a pas de point stationnaire.

Etude des branches infinies : On a, pour $t \notin \{0,1\}$, $\dfrac{y(t)}{x(t)} = \dfrac{t^2-t+1}{t-1}$.

En $\pm\infty$: $\displaystyle\lim_{\pm\infty} \frac{y}{x} = +\infty$; on a donc une branche parabolique de direction (Oy).

En 0 : $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{y}{x} = -1$, et $\displaystyle\lim_{t\to 0} y + x = 3$; on a donc une asymptote d'équation $x + y - 3 = 0$.

Comme on a : $x(t) + y(t) - 3 = 4t(t+1) \underset{t\to 0}{\sim} 4t$, on en déduit la position de la courbe par rapport à son asymptote.

Finalement, on obtient la courbe suivante :