CB n°9 - CONIQUES - COURBES PARAMETREES - Sujet 1

1. Donner la nature des coniques suivantes et les représenter dans un repère orthonormé.

a. $3x^2 + 3y^2 + 4xy - 2x - 1 = 0$

Soient $S = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $L = \begin{pmatrix} -2 & 0 \end{pmatrix}$, et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
L'équation de la conique dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ s'écrit : ${}^tXSX + LX - 1 = 0$.
La matrice S a pour déterminant 5, la conique est donc du type ellipse.
Les valeurs propres de S sont 1 et 5.
$E_1 = \text{Vect}\{(1, -1)\}$.
On note $\vec{u}$ et $\vec{v}$ les vecteurs de coordonnées respectives $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,
P la matrice de passage de la base $(\vec{i}, \vec{j})$ à la base $(\vec{u}, \vec{v})$, et $X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = {}^tPX$.
L'équation devient :

$$ {}^tX_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} X_1 + LPX_1 - 1 = 0 $$

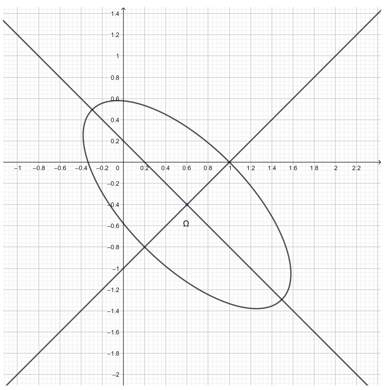
c'est-à-dire que l'équation de l'ellipse dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ est : $x_1^2 + 5y_1^2 - \sqrt{2}x_1 - \sqrt{2}y_1 - 1 = 0$, ce qui s'écrit également :

$$ \left(x_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 5\left(y_1 - \frac{\sqrt{2}}{10}\right)^2 = \frac{8}{5} $$

Ainsi, en notant Ω le point de coordonnées $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{10}\right)$ dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$, l'équation de la conique dans le repère $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$ est :

$$ \frac{X^2}{\left(2\sqrt{\frac{2}{5}}\right)^2} + \frac{Y^2}{\left(\frac{2\sqrt{2}}{5}\right)^2} = 1 $$

Dans le repère $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$, les sommets de l'ellipse ont pour coordonnées $\left(\pm 2\sqrt{\frac{2}{5}}, 0\right)$ et $\left(0, \pm\frac{2\sqrt{2}}{5}\right)$.
Par ailleurs, les coordonnées de Ω dans le repère $\left(0, \vec{i}, \vec{j}\right)$ sont $\left(\frac{3}{5}, -\frac{2}{5}\right)$.
On obtient la courbe suivante :



b. $9x^2 - 24xy + 16y^2 + 10x - 55y + 50 = 0$

Soient $S = \begin{pmatrix} 9 & -12 \\ -12 & 16 \end{pmatrix}$, $L = \begin{pmatrix} 10 & -55 \end{pmatrix}$, et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
L'équation de la conique dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ s'écrit : ${}^tXSX + LX + 50 = 0$.
La matrice S a pour déterminant 0, la conique est donc du type parabole.
0 étant une valeur propre de S, l'autre valeur propre est $\mathrm{tr}(S)$, c'est-à-dire 25.
Un vecteur propre associé à la valeur propre 0, est $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.
On note $\vec{u}$ et $\vec{v}$ les vecteurs de coordonnées respectives $\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$ et $\left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$,
P la matrice de passage de la base $(\vec{i}, \vec{j})$ à la base $(\vec{u}, \vec{v})$, et $X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = {}^tPX$.
L'équation devient :

$$ {}^tX_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix} X_1 + LPX_1 + 50 = 0 $$

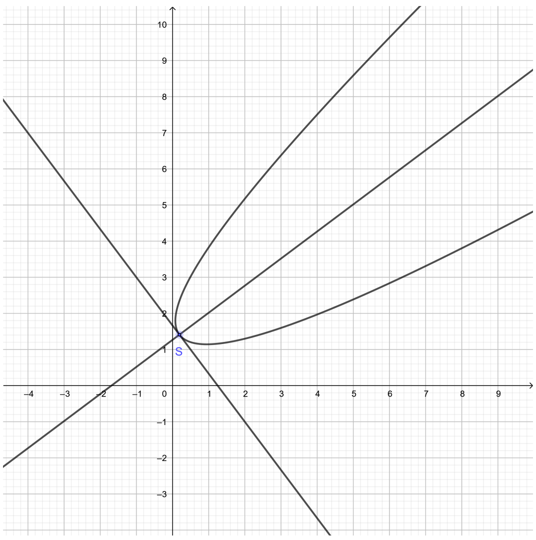
c'est-à-dire que l'équation de la parabole dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ est : $25y_1^2 - 25x_1 - 50y_1 + 50 = 0$, ce qui s'écrit également

$$ (y_1 - 1)^2 = (x_1 - 1) $$

On en déduit que le sommet S de la parabole a pour coordonnées $(1, 1)$, dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$, et que l'équation réduite de la parabole dans le repère $(S, \vec{u}, \vec{v})$ est

$$ Y^2 = X $$

On obtient la courbe suivante :



2. Etudier et tracer la courbe admettant pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{t^2}{t-1} \\ y(t) = \dfrac{t^2+1}{t^2-1} \end{cases} \quad , \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$$

On a : $\begin{cases} x'(t) = \dfrac{t(t-2)}{(t-1)^2} \\ y'(t) = \dfrac{-4t}{(t^2-1)^2} \end{cases}$. On en déduit le tableau de variations suivant :

t	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$x'(t)$		+		+	0	-	‖	-	0	+	
x	$-\infty$	↗	$-1/2$	↗	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	4	↗	$+\infty$
$y'(t)$		+	‖	+	0	-	‖	-		-	
y	1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$5/3$	↘	1

On a une tangente verticale au point de paramètre 2 et un point singulier au point de paramètre 0. $x(t) \underset{t \to 0}{=} -t^2 - t^3 + o(t^3)$ et $y(t) \underset{t \to 0}{=} -1 - 2t^2 + o(t^3)$; on en déduit que l'on a un rebroussement de première espèce au point de paramètre 0, la tangente étant dirigée par le vecteur $\overrightarrow{V_1}(-1, -2)$.

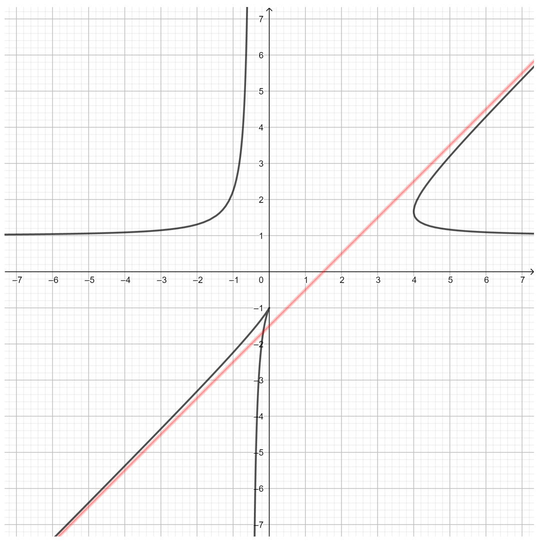
Etude des branches infinies :

En $\pm\infty$, on a un asymptote d'équation $y = 1$.

En -1, on a une asymptote d'équation $x = -\dfrac{1}{2}$.

En 1 : $\dfrac{y}{x} \underset{t \to 1}{\sim} 1$, et $y - x \underset{t \to 1}{\sim} -\dfrac{3}{2}$; on en déduit que l'on a une asymptote d'équation $y = x - \dfrac{3}{2}$

Finalement, on obtient la courbe suivante :



CB N°9 - CONIQUES - COURBES PARAMETREES - SUJET 2

1. Donner la nature des coniques suivantes et les représenter dans un repère orthonormé.

a. $x^2 + 4y^2 - 4xy - 6\sqrt{5}x + 3 = 0$

Soient $S = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$, $L = \begin{pmatrix} -6\sqrt{5} & 0 \end{pmatrix}$, et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
L'équation de la conique dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ s'écrit : ${}^tXSX + LX + 3 = 0$.
La matrice S a pour déterminant 0, la conique est donc du type parabole.
0 étant une valeur propre de S, l'autre valeur propre est $\mathrm{tr}(S)$, c'est-à-dire 5.
Un vecteur propre associé à la valeur propre 0, est $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
On note $\vec{u}$ et $\vec{v}$ les vecteurs de coordonnées respectives $\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ et $\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$,
P la matrice de passage de la base $(\vec{i}, \vec{j})$ à la base $(\vec{u}, \vec{v})$, et $X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = {}^tPX$.
L'équation devient :

$$ {}^tX_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} X_1 + LPX_1 + 3 = 0 $$

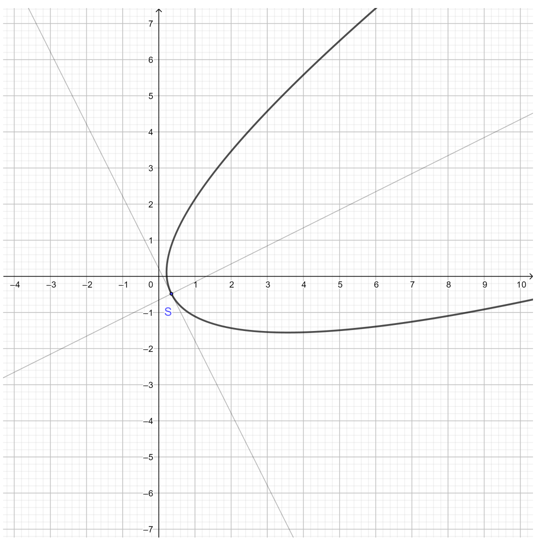
c'est-à-dire que l'équation de la parabole dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ est : $5y_1^2 - 12x_1 + 6y_1 + 3 = 0$, ce qui s'écrit également :

$$ 5\left(y_1 + \frac{3}{5}\right)^2 = 12\left(x_1 - \frac{1}{10}\right) $$

On en déduit que le sommet S de la parabole a pour coordonnées $\left(\frac{1}{10}, -\frac{3}{5}\right)$, dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$, et que l'équation réduite de la parabole dans le repère $(S, \vec{u}, \vec{v})$ est

$$ Y^2 = \frac{12}{5}X $$

On obtient la courbe suivante :



b. $3x^2 - 10xy + 3y^2 - 4x - 4y = 0$

Soient $S = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$, $L = \begin{pmatrix} -4 & -4 \end{pmatrix}$, et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

L'équation de la conique dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ s'écrit : ${}^tXSX + LX = 0$.

La matrice S a pour déterminant $-16 < 0$, la conique est donc du type hyperbole.

Les valeurs propres de S sont -2 et 8.

$E_{-2} = \text{Vect}\{(1,1)\}$.

On note $\vec{u}$ et $\vec{v}$ les vecteurs de coordonnées respectives $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,

P la matrice de passage de la base $(\vec{i}, \vec{j})$ à la base $(\vec{u}, \vec{v})$, et $X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = {}^tPX$.

L'équation devient :

$${}^tX_1 \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} X_1 + LPX_1 = 0$$

c'est-à-dire que l'équation de l'hyperbole dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ est : $-2x_1^2 + 8y_1^2 - 4\sqrt{2}x_1 = 0$, ce qui s'écrit également :

$$-2\left(x_1 + \sqrt{2}\right)^2 + 8y_1^2 + 4 = 0$$

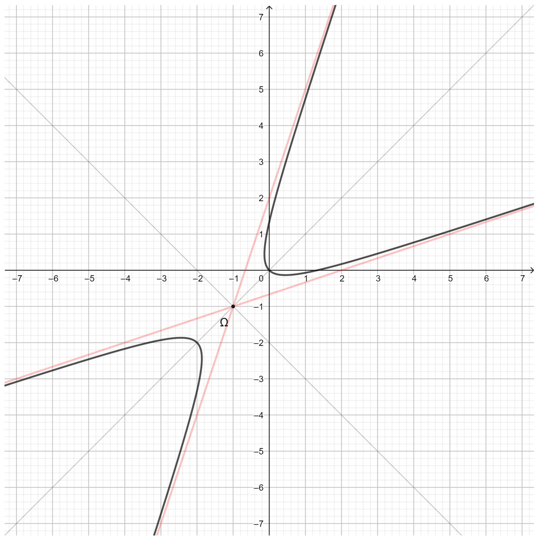
Ainsi, en notant Ω le point de coordonnées $\left(-\sqrt{2}, 0\right)$ dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$, l'équation de la conique dans le repère $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$ est :

$$\frac{X^2}{(\sqrt{2})^2} - \frac{Y^2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 1$$

Dans le repère $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$, les sommets de l'hyperbole ont pour coordonnées $\left(\pm\sqrt{2}, 0\right)$ et les asymptotes ont pour équations : $Y = \pm\frac{1}{2}X$.

Par ailleurs, les coordonnées de Ω dans le repère $\left(0, \vec{i}, \vec{j}\right)$ sont $(-1, -1)$.

On obtient la courbe suivante :



2. Etudier l'arc paramétré suivant, et tracer la courbe correspondante :

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{t^3}{t-1} \\ y(t) = \dfrac{t^2}{t-1} \end{cases} , \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

On a : $\begin{cases} x'(t) = \dfrac{t^2(2t-3)}{(t-1)^2} \\ y'(t) = \dfrac{t(t-2)}{(t-1)^2} \end{cases}$. On en déduit le tableau de variations suivant :

	$-\infty$		0		1		$3/2$		2		$+\infty$
$x'(t)$		-	0	-	‖	-	0	+		+	
x	$+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	27/4	↗	8	↗	$+\infty$
$y'(t)$		+	0	-	‖	-		-	0	+	
y	$-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	9/2	↘	4	↗	$+\infty$

On a une tangente verticale au point de paramètre $\dfrac{3}{2}$, une tangente horizontale au point de paramètre 2 et un point singulier au point de paramètre 0.

$x(t) \underset{t\to 0}{=} -t^3 + o(t^3)$ et $y(t) \underset{t\to 0}{=} -t^2 - t^3 + o(t^3)$; on en déduit que l'on a un rebroussement de première espèce au point de paramètre 0, la tangente étant dirigée par le vecteru $\overrightarrow{V_1}(0,-1)$.

Etude des branches infinies :

En $\pm\infty$: $\dfrac{y}{x} \underset{t\to\pm\infty}{\sim} \dfrac{1}{t} \underset{t\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0$. On a donc une branche parabolique de direction (Ox).

En 1 : $\dfrac{y}{x} \underset{t\to 1}{\sim} 1$, et $y - x \underset{t\to 1}{\sim} -1$; on en déduit que l'on a une asymptote d'équation $y = x - 1$

Finalement, on obtient la courbe suivante :