- CC1-S1 - - 2017-2018 -

– Correction - Algèbre –

Exercice 1

Première partie

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $T \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\mathbf{deg(T)} = n$.
Si $P \in \mathbb{C}[X]$, on rappelle que la division euclidienne de $P(X^2)$ par T donne l'unique couple de polynômes (Q, R) tel que

$$P(X^2) = QT + R \quad \text{et} \quad \deg(R) < \deg(T)$$

Soit alors f l'application définie par :

$$\forall P \in \mathbb{C}[X], \quad f(P) = Q + XR$$

avec Q et R précédemment définis.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{C}[X]$.
f est clairement une application de $\mathbb{C}[X]$ dans $\mathbb{C}[X]$.
Soient P_1, P_2 dans $\mathbb{C}[X]$, et $\lambda \in \mathbb{C}$.
On a : $\begin{cases} P_1(X^2) = Q_1T + R_1 & \text{et} & \deg(R_1) < \deg(T) \\ P_2(X^2) = Q_2T + R_2 & \text{et} & \deg(R_2) < \deg(T) \end{cases}$ donc :
$(\lambda P_1 + P_2)(X^2) = (\lambda Q_1 + Q_2)T + (\lambda R_1 + R_2)$, et $\deg(\lambda R_1 + R_2) < \deg(T)$, ce qui représente la division euclidienne de $\lambda P_1 + P_2(X^2)$ par T.
On a donc : $f(\lambda P_1 + P_2) = (\lambda Q_1 + Q_2) + X(\lambda R_1 + R_2) = (\lambda Q_1 + XR_1) + Q_2 + XR_2 = \lambda f(P_1) + f(P_2)$.
f est donc bien un endomorphisme de $\mathbb{C}[X]$.

2. Montrer que $\mathbb{C}_n[X]$ est stable par f. On note alors f_n l'endomorphisme induit.
Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$, alors $P(X^2) \in \mathbb{C}_{2n}[X]$ et comme $P(X^2) = QT+R$ avec $\deg(R) < \deg(T)$ et $\deg(T) = n$, on en déduit que $Q \in \mathbb{C}_n[X]$ et $XR \in \mathbb{C}_n[X]$. Enfin, $f(P) = Q + XR \in \mathbb{C}_n[X]$.

3. Dans cette question uniquement, $n = 2$ et $T = X^2$.

a. Montrer que la matrice A de f_2 dans la base canonique de $\mathbb{C}_2[X]$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si $P = 1$, alors $P(X^2) = 0.T + 1$ donc $Q = 0$ et $R = 1$, puis $f_2(1) = 0 + X.1 = X$.
Si $P = X$, alors $P(X^2) = X^2 = 1.T + 0$ donc $Q = 1$ et $R = 0$, puis $f_2(X) = 1 + X.0 = 1$.
Si $P = X^2$, alors $P(X^2) = X^4 = X^2.T + 0$ donc $Q = X^2$ et $R = 0$, puis $f_2(X^2) = X^2 + X.0 = X^2$.
On a donc bien $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
De manière générale, si $P = a + bX + cX^2$ alors $P(X^2) = a + bX^2 + cX^4 = (b + cX^2)X^2 + a$, donc $Q = b + cX^2$ et $R = a$, puis $f_2(P) = b + cX^2 + X.a = b + aX + cX^2$.

b. Calculer A^2. En déduire que f_2 est bijective et donner son application réciproque.
$A^2 = \mathrm{I}_3$, donc $f_2 \circ f_2 = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}_2[X]}$; ainsi f_2 est bijective, et $f_2^{-1} = f_2$.

c. Préciser la nature de f_2, ainsi que ses caractéristiques géométriques.
On sait que $f_2 \circ f_2 = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}_2[X]}$, donc f_2 est une symétrie.
$\mathrm{Ker}(A - \mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et $\mathrm{Ker}(A + \mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.
Ainsi, f_2 est la symétrie par rapport à $\mathrm{Vect}(1 + X, X^2)$ parallèlement à $\mathrm{Vect}(1 - X)$.

Deuxième partie

Soit $a \in \mathbb{C}$. Dans cette partie, $n = 3$ et $T = X^3 + X^2 + a$.

1. Montrer que la matrice B de f_3 dans la base canonique de $\mathbb{C}_3[X]$ est :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -a-1 \\ 1 & 0 & a+1 & 1+a+a^2 \\ 0 & 0 & -a & -a-1 \\ 0 & 1 & 1 & 2a+2 \end{pmatrix}$$

On admettra le résultat de la quatrième colonne.

Si $P = 1$, alors $P(X^2) = 0.T + 1$ donc $Q = 0$ et $R = 1$, puis $f_3(1) = 0 + X.1 = X$.
Si $P = X$, alors $P(X^2) = X^2 = 0.T + X^2$ donc $Q = 0$ et $R = X^2$, puis $f_3(X) = 0 + X.X^2 = X^3$.
Si $P = X^2$, alors $P(X^2) = X^4$; la division euclidienne de X^4 par T donne :
$P(X^2) = (X-1)T + X^2 - aX + a$ donc $Q = X - 1$ et $R = X^2 - aX + a$, puis
$f_3(X^2) = X - 1 + X(X^2 - aX + a) = X^3 - aX^2 + (a+1)X - 1$.
Si $P = X^3$, alors $P(X^3) = X^6$; la division euclidienne de X^6 par T donne :
$P(X^3) = (X^3 - X^2 + X - a - 1)T + (2a+1)X^2 - aX + a^2 + a$ donc $Q = X^3 - X^2 + X - a - 1$ et $R = (2a+1)X^2 - aX + a^2 + a$, puis
$f_3(X^3) = X^3 - X^2 + X - a - 1 + X((2a+1)X^2 - aX + a^2 + a) = (2a+2)X^3 - (a+1)X^2 + (a^2+a+1)X - a - 1$.

On a donc bien $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -a-1 \\ 1 & 0 & a+1 & 1+a+a^2 \\ 0 & 0 & -a & -a-1 \\ 0 & 1 & 1 & 2a+2 \end{pmatrix}$.

2. Déterminer les valeurs de a pour lesquelles l'application f_3 n'est pas bijective.

$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -a-1 \\ 1 & 0 & a+1 & 1+a+a^2 \\ 0 & 0 & -a & -a-1 \\ 0 & 1 & 1 & 2a+2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & a+1 & 1+a+a^2 \\ 0 & 1 & 1 & 2a+2 \\ 0 & 0 & -1 & -a-1 \\ 0 & 0 & -a & -a-1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & a+1 & 1+a+a^2 \\ 0 & 1 & 1 & 2a+2 \\ 0 & 0 & -1 & -a-1 \\ 0 & 0 & 0 & a^2-1 \end{pmatrix}$

B est inversible si, et seulement si $\mathrm{rg}(B) = 4$ ce qui équivaut à $a \notin \{-1, 1\}$.
Ainsi, f_3 est non bijective si, et seulement si $a \notin \{-1, 1\}$.

3. Dans cette question uniquement, $a = -1$.

a. Déterminer une base du noyau puis de l'image de f_3.

Si $a = -1$, alors $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{Ker}(B) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ d'où $\mathrm{Ker}(f_3) = \mathrm{Vect}(1 - X^3)$.

Le théorème du rang donne $\dim(\mathrm{Im}(f_3)) = 3$. La première et la dernière colonne de B étant identiques, les trois premières colonnes forment une famille libre de vecteurs, et on a :
$\mathrm{Im}(f_3) = \mathrm{Vect}(X, X^3, -1 + X^2 + X^3)$.

b. Le noyau et l'image de f_3 sont-ils supplémentaires ?

On concatène une base de $\mathrm{Im}(f_3)$ et une base de $\mathrm{Ker}(f_3)$. On obtient la famille $\{1 - X^3, X, X^3, -1 + X^2 + X^3\}$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{C}_3[X]$ est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;
un très rapide pivot de Gauss donne cette matrice de rang 4.
On en déduit que le noyau et l'image de f_3 sont supplémentaires dans $\mathbb{C}_3[X]$.