- CC1-S2 - - 2017-2018 -

– CORRECTION - ALGÈBRE - GÉOMÉTRIE –

Exercice 1

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = \left(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.
On note S la surface d'équation

$$(E): \quad xy + \sqrt{3}(x+y)z = 0$$

c'est-à-dire l'ensemble des points de l'espace dont les coordonnées vérifient l'équation (E).

1. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \sqrt{3} \\ 1 & 0 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$$

a. Justifier, sans calcul, que A est diagonalisable.
A est une matrice symétrique réelle, elle est donc diagonalisable dans $\mathbb{R}$ en base orthonormée.

b. Donner le spectre de A.
$\text{Sp}(A) = \{-1, -2, 3\}$

c. Montrer qu'il existe un repère orthonormé $\mathcal{R}_1 = \left(0, \vec{i_1}, \vec{j_1}, \vec{k_1}\right)$, pour lequel les coordonnées sont notées (x_1, y_1, z_1), tel que l'équation de S dans $\mathcal{R}_1$ soit :

$$x_1^2 + 2y_1^2 - 3z_1^2 = 0$$

D'après les questions précédentes, il existe une matrice orthogonale P telle que $A = P\text{diag}(-1, -2, 3)^t P$.
On note $\left(\vec{i_1}, \vec{j_1}, \vec{k_1}\right)$ l'image de la base $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ par l'isométrie de matrice P dans la base canonique. Cette nouvelle base est orthonormée.
Si on note (x, y, z) les coordonnées d'un point dans le repère initial, et (x_1, y_1, z_1) les coordonnées dans le nouveau repère, on a : $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = {}^t P \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, et $\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \end{pmatrix}$.
$(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ vérifie (E) si, et seulement si :

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \frac{1}{2} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

ce qui équivaut à :

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} P\text{diag}(-1, -2, 3)\, {}^t P \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

soit encore :

$$x_1^2 + 2y_1^2 - 3z_1^2 = 0$$

2. Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation

$$x + y = \sqrt{2}$$

dans le repère initial $\mathcal{R}$.

a. Donner la matrice, dans la base canonique, de la rotation r d'axe $\text{Vect}\left(\vec{k}\right)$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

$$R = \text{mat}(r) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b. On note $\left(\vec{I},\vec{J},\vec{K}\right)$ l'image par r de la base $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. Justifier que cette nouvelle base est orthonormée.

Une rotation est une isométrie. Elle transforme une base orthonormée, en une base orthonormée.

c. On note $\mathcal{R}_2$ le repère $\left(O,\vec{I},\vec{J},\vec{K}\right)$, et (X,Y,Z) les coordonnées dans ce repère.
Déterminer les équations de S et $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{R}_2$.

On a : $\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} X\\ Y\\ Z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}(X-Y)\\ \frac{\sqrt{2}}{2}(X+Y)\\ Z\end{pmatrix}$.

Dans le nouveau repère, l'équation (E) devient :

$$X^2-Y^2+2\sqrt{6}XZ=0$$

celle du plan $\mathcal{P}$ devient :

$$X=1$$

d. Donner la nature de la courbe $\mathcal{C}$, intersection de S et $\mathcal{P}$.

On se place dans le repère $\left(O,\vec{I},\vec{J},\vec{K}\right)$.
Dans le plan $\mathcal{P}$, d'équation $X=1$, la courbe $\mathcal{C}$ a pour équation : $Y^2=1+2\sqrt{6}Z$. C'est une parabole.

<u>Exercice 2</u>

On considère $E=\mathbb{R}_2[X]$, muni du produit scalaire :

$$\forall (P,Q)\in E^2,\quad (P|Q)=\int_0^1 P(t)Q(t)\mathrm{d}t$$

On définit l'application $\varphi : E\to E$ par :

$$\forall P\in E,\quad \varphi(P(X))=P(1-X)$$

1. Montrer que φ est un automorphisme orthogonal.

φ est clairement linéaire, de E dans E.
Pour tout $(P,Q)\in E^2$, on a : $(\varphi(P)|\varphi(Q))=\displaystyle\int_0^1 P(1-t)Q(1-t)\mathrm{d}t$.
Le changement de variable $u=1-t$ donne immédiatement $(\varphi(P)|\varphi(Q))=(P|Q)$.
φ est donc un automorphisme orthogonal.

2. Montrer que φ est une symétrie.

Pour tout $P\in E$, on a : $\varphi(\varphi(P))=\varphi(P(1-X))=P(1-(1-X))=P$. On en déduit que φ est une symétrie.

3. Donner les éléments caractéristiques de la symétrie φ, et vérifier qu'elle est orthogonale.

$(P=aX^2+bX+c\in \mathrm{Ker}(\varphi-\mathrm{Id}_E))\Leftrightarrow(-2aX-2bX+a+b=0)$.
On en déduit que $\mathrm{Ker}(\varphi-\mathrm{Id}_E)=\mathrm{Vect}\{X^2-X,1\}$.
$(P=aX^2+bX+c\in \mathrm{Ker}(\varphi+\mathrm{Id}_E))\Leftrightarrow(-2aX+a+b+2c=0)$.
On en déduit que $\mathrm{Ker}(\varphi+\mathrm{Id}_E)=\mathrm{Vect}\{2X-1\}$.
Ainsi, φ est la symétrie par rapport à $\mathrm{Vect}\{X^2-X,1\}$ parallèlement à $\mathrm{Vect}\{2X-1\}$.
On a : $(2X-1|X^2-X)=\displaystyle\int_0^1(2t-1)(t^2-t)\mathrm{d}t=0$ et $(2X-1|1)=\displaystyle\int_0^1 2t-1\mathrm{d}t=0$.
On retrouve donc bien que la symétrie est orthogonale.

Exercice 3

On considère la courbe paramétrée :

$$M(t)\begin{cases} x(t) = \sin^2(t) \\ y(t) = (1+\cos(t))\sin(t) \end{cases}$$

1. Etudier et représenter graphiquement cette courbe dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.
On déterminera la nature des points stationnaires, le cas échéant.

Cette courbe paramétrée est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
$\forall t \in \mathbb{R},\ t+2\pi \in \mathbb{R}$, et $M(t+2\pi) = M(t)$. On obtient donc toute la courbe sur $[-\pi, \pi]$.
$\forall t \in [-\pi, \pi], -t \in [-\pi, \pi]$, et $M(-t)$ et $M(t)$ sont symétriques par rapport à $\left(0, \vec{i}\right)$. On trace l'arc correspondant au segment $[0, \pi]$, que l'on complète par symétrie par rapport à $\left(0, \vec{i}\right)$.

On a également $M'(t)$ $\begin{cases} x'(t) = 2\sin(t)\cos(t) \\ y'(t) = (1+\cos(t))(2\cos(t)-1) \end{cases}$. On en déduit le tableau de variations suivant :

t	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$		π
$x'(t)$	0	$+$		$+$	0	$-$	
x	0	$\nearrow$		$\nearrow$	1	$\searrow$	0
$y'(t)$		$+$	0	$-$		$-$	
y	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$		$\searrow$	0

On constate que
- $M(0) = (0,0)$ est à tangente verticale,
- $M\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{3}{4}, \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$ est à tangente horizontale,
- $M\left(\frac{\pi}{2}\right) = (1,1)$ est à tangente verticale,
- et enfin $M(\pi) = (0,0)$ est un point stationnaire.

Reste à déterminer la nature du point stationnaire. On peut poser $h = t - \pi$.

On a alors $M(h+\pi)$ $\begin{cases} x(h+\pi) = \sin^2(h) \underset{h\to 0}{=} h^2 + \circ(h^3) \\ y(h+\pi) = -(1-\cos(h))\sin(h) \underset{h\to 0}{=} -\frac{h^3}{2} + \circ(h^3) \end{cases}$.

On peut conclure que la tangente en $M(\pi)$ est dirigée par $(1,0)$ et qu'il s'agit d'un point de rebroussement de première espèce. On termine par le tracé ci-après.

2. a. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{OM}(t)$ et $\overrightarrow{OM}(t+\pi)$ sont orthogonaux.

On détermine les coordonnées de $\overrightarrow{OM}(t)$ et $\overrightarrow{OM}(t+\pi)$, puis $\overrightarrow{OM}(t).\overrightarrow{OM}(t+\pi) = 0$ permet de conclure que $\overrightarrow{OM}(t)$ et $\overrightarrow{OM}(t+\pi)$ sont orthogonaux.

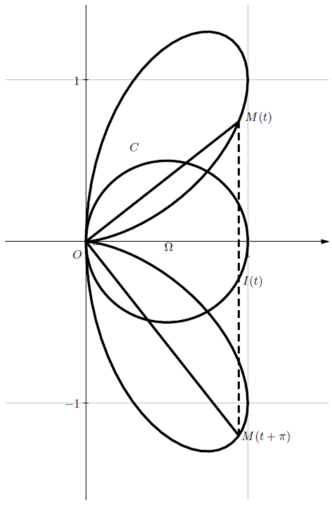
b. Montrer que le milieu $I(t)$ de $[M(t)M(t+\pi)]$ est sur le cercle $\mathscr{C}$ de centre $\Omega\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ et de rayon à préciser.

A partir des coordonnées $(X(t), Y(t))$ de $I(t)$, on a $\forall t \in \mathbb{R}$, $\left(X(t) - \frac{1}{2}\right)^2 + Y(t)^2 = \frac{1}{4}$.

Donc $\mathscr{C}$ est le cercle de centre $\Omega\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ et de rayon $\frac{1}{2}$.

c. Tracer $\mathscr{C}$,placer $M(t)$, et en déduire $M(t+\pi)$ puis $I(t)$.

On place $M(t)$ sur la courbe. On déduit $M(t+\pi)$ par *a*), puis $I(t)$ par *b*).



Exercice 4

On considère la courbe paramétrée :

$$M(t)\begin{cases} x(t) = \dfrac{t^3}{t^2-1} \\ y(t) = \dfrac{t(3t-2)}{3(t-1)} \end{cases}$$

1. Démontrer qu'au voisinage de 1, cette courbe admet une asymptote $\mathscr{D}$ que l'on déterminera.

Tout d'abord, $\lim\limits_{t\to 1}|x(t)| = \lim\limits_{t\to 1}|y(t)| = +\infty$. Ce qui confirme que la courbe admet une branche infinie au voisinage de 1.
On a successivement :

$$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{(3t-2)(t+1)}{3t^2} \underset{t\to 1}{\longrightarrow} \frac{2}{3}$$
$$y(t) - \frac{2}{3}x(t) = \frac{t(t+2)}{3(t+1)} \underset{t\to 1}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$$

On en déduit que la droite $\mathscr{D}\ :\ y = \dfrac{2}{3}x + \dfrac{1}{2}$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ au voisinage de 1.

2. Préciser les positions relatives au voisinage de 1.

On détermine le signe de $\epsilon(t) = y(t) - \dfrac{2}{3}x(t) - \dfrac{1}{2}$ au voisinage de 1.
On a $\epsilon(t) = \dfrac{t(t+2)}{3(t+1)} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{(t-1)\left(t+\frac{3}{2}\right)}{3(t+1)} \underset{t\to 1}{\sim} \dfrac{5}{12}(t-1)$.
On conclut qu'au voisinage de 1 à droite (resp. à gauche) $\mathscr{C}$ est au dessus (resp. en dessous) de $\mathscr{D}$.