- CC1-S1 - - 2017-2018 -

– Correction - Algèbre –

Exercice 1

Soient les suites réelles $(u_n), (v_n)$ et (w_n) définies par :

$$(u_0, v_0, w_0) = (1, 1, -1) \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = u_n - v_n + w_n \\ v_{n+1} = -u_n + v_n + w_n \\ w_{n+1} = -u_n - v_n + 3w_n \end{cases}$$

1. Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ est diagonalisable, et la diagonaliser.

$\chi_A = (X-1)(X-2)^2$; le polynôme caractéristique est scindé.
$E_1 = \mathrm{Vect}\{(1,1,1)\}$, $E_2 = \mathrm{Vect}\{(1,0,1),(0,1,1)\}$.
$\dim(E_1) = m(1), \dim(E_2) = m(2)$, donc A est diagonalisable, et on a :
$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Déterminer la matrice A^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$\forall n \in \mathbb{N}, A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1-2^n & 2^n-1 \\ 1-2^n & 1 & 2^n-1 \\ 1-2^n & 1-2^n & 2^{n+1}-1 \end{pmatrix}$.

3. Expliciter les termes u_n, v_n et w_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note : $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$. On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = AX_n$.

Une récurrence immédiate donne, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $X_n = A^n X_0 = \begin{pmatrix} 3-2^{n+1} \\ 3-2^{n+1} \\ 3-2^{n+2} \end{pmatrix}$.

Exercice 2

E désigne un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit p un projecteur de E, non nul, et différent de Id_E.

a. Montrer que $\mathrm{Im}(p)$ et $\mathrm{Ker}(p)$ sont supplémentaires dans E.
Soit $x \in \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Ker}(p)$; $x \in \mathrm{Im}(p)$ donc il existe $a \in E$ tel que $x = p(a)$. p étant un projecteur, on en déduit que $p(x) = p(a)$, donc $x = p(a) = p(x) = 0$ car $x \in \mathrm{Ker}(p)$. Ainsi, $\mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Ker}(p) = \{0_E\}$.
Le théorème de rang donne de plus $\dim(\mathrm{Im}(p)) + \dim(\mathrm{Ker}(p)) = \dim(E)$, d'où : $\mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p) = E$.

b. Montrer que le spectre de p est $\{0, 1\}$, et déterminer ses espaces propres.
D'après la question précédente, on peut former une base de E en concaténant une base de $\mathrm{Im}(p)$ et une base de $\mathrm{Ker}(p)$.
Si $x \in \mathrm{Im}(p)$, il existe $a \in E$ tel que $x = p(a)$, alors $p(x) = p(p(a)) = p(a) = x$.
Ainsi, en notant $r = \mathrm{rg}(p)$, dans cette nouvelle base, la matrice de p est $\begin{pmatrix} \mathrm{I}_r & 0_{n-r} \\ 0_r & 0_{n-r} \end{pmatrix}$.
On en déduit que 0 est une valeur propre de p d'espace propre $\mathrm{Ker}(p)$, et 1 est une valeur propre de p d'espace propre $\mathrm{Im}(p)$.

c. En déduire que $\mathrm{Tr}(p) = \mathrm{rg}(p)$ (où $\mathrm{Tr}(p)$ désigne la trace de p).
La trace étant un invariant de similitude, de la question précédente, on obtient immédiatement : $\mathrm{Tr}(p) = r = \mathrm{rg}(p)$.

d. Soit u un endomorphisme de E tel que $\mathrm{Tr}(u) = \mathrm{rg}(u)$. u est-il nécessairement un projecteur ?

Non ! Considérons l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On a $\mathrm{Tr}(u) = \mathrm{rg}(u) = 2$ et $u \circ u \neq u$.

2. Soit u un endomorphisme de E de rang 1.

a. Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que la matrice de u dans $\mathscr{B}$ est de la forme :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}), \qquad \text{où} \quad a_1, a_2, \cdots a_n \text{ sont des réels}$$

D'après le théorème du rang, on a : $\dim(\mathrm{Ker}(u)) = n - 1$. En complétant une base de $\mathrm{Ker}(u)$, on obtient une base $\mathscr{B}$ de E dans laquelle la matrice de u a la forme attendue.

b. Montrer que u est diagonalisable si, et seulement si la trace de u est non nulle.

D'après la question précédente, le polynôme caractéristique $\chi_u = X^{n-1}(X - a_n)$ est scindé.

0 est donc une valeur propre de u, de multiplicité $m(0) = n - 1$ si $a_n \neq 0$, et $m(0) = n$ si $a_n = 0$.

$\dim(\mathrm{Ker}(u)) = n - 1$, donc u est diagonalisable si, et seulement si $m(0) = n - 1$ ce qui équivaut à $a_n \neq 0$, ce qui équivaut encore à $\mathrm{Tr}(u) = (n-1) \times 0 + a_n \neq 0$.

c. On suppose que $\mathrm{Tr}(u) = \mathrm{rg}(u)$. Montrer que u est un projecteur.

Si $\mathrm{Tr}(u) = \mathrm{rg}(u) = 1$, alors u est diagonalisable, et il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que la matrice de u dans $\mathscr{B}$ est $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

C'est la matrice de la projection sur E_1 parallèlement à E_0.

d. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Justifier sans calcul que A est la matrice d'un projecteur, puis en donner les éléments caractéristiques.

On a : $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{Tr}(A) = 1$. On déduit des questions précédentes que A est la matrice de la projection sur $E_1 = \mathrm{Vect}\{(1,1,1)\}$ parallèlement à $E_0 = \mathrm{Vect}\{(1,0,1),(0,1,1)\}$.