- CC1-S1 - - 2018-2019 -

– Correction - Algèbre –

Exercice 1

Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique (e_1, e_2, e_3), on considère l'endomorphisme u défini par :

$$u(x, y, z) = (-x, 2x + y, -2x - 2y - z)$$

Soient $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ et ε_3 les vecteurs définis par :

$$\varepsilon_1 = e_2 - e_3,\ \varepsilon_2 = -e_1 + e_2 - e_3,\ \varepsilon_3 = e_1 - e_2 + 2e_3$$

1. Montrer que $\mathscr{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
$\det(\mathscr{B}) \neq 0$ donc $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

2. Déterminer la matrice de u dans $\mathscr{B}$.

$u(\varepsilon_1) = \varepsilon_1, u(\varepsilon_2) = -\varepsilon_2, u(\varepsilon_3) = -\varepsilon_3$ on en déduit : $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

3. Que peut-on en déduire ?
u est la symétrie par rapport à $\mathrm{Vect}\{\varepsilon_1\}$ parallèlement à $\mathrm{Vect}\{\varepsilon_2, \varepsilon_3\}$.

Exercice 2

On considère deux entiers n et p tels que $2 \leq p \leq n$. E désigne un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$. $f_1, f_2, ..., f_p$ sont p endomorphismes non nuls de E tels que

$$f_1 + f_2 + \cdots + f_p = \mathrm{Id}_E \quad \text{et} \quad f_i \circ f_j = 0, \text{ pour tout } \ i \neq j$$

Soient $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p$ des éléments de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts. On note $f = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \cdots + \alpha_p f_p$.

1. Montrer que pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, f_i est un projecteur de E.

Soit $i \in [\![1, p]\!]$. $f_i \in \mathscr{L}(E)$ et $f_i = f_i \circ \mathrm{Id}_E = f_i \circ \displaystyle\sum_{k=1}^{p} f_k = \sum_{k=1}^{p} f_i \circ f_k = f_i \circ f_i$ (car si $i \neq k, f_i \circ f_k = 0$).

On en déduit que f_i est un projecteur.

2. Calculer $f^k = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{k \text{ fois}}$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Montrons par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}^*, f^k = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \alpha_i^k f_i$:

Pour $k = 1$ c'est la définition de f.
On suppose que le résultat est vrai pour $k \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$f^{k+1} = f^k \circ f = \left(\sum_{i=1}^{p} \alpha_i^k f_i\right) \circ \left(\sum_{j=1}^{p} \alpha_j f_j\right) = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} \alpha_i^k \alpha_j f_i \circ f_j = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i^{k+1} f_i \circ f_i = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i^{k+1} f_i,$$

car si $i \neq k, f_i \circ f_k = 0$, et $\forall i \in [\![1, p]\!], f_i \circ f_i = f_i$. Le résultat est donc vrai pour $k + 1$.

3. Montrer que $\{f_1, f_2, \cdots, f_p\}$ est une famille libre.

Soit $(\lambda_1, \cdots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} \lambda_k f_k = 0$.

Pour $i \in [\![1, p]\!]$, on a : $f_i \circ \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \lambda_k f_k = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k f_i \circ f_k = \lambda_i f_i \circ f_i = \lambda_i f_i = 0$, avec $f_i \neq 0$ donc $\lambda_i = 0$.

4. Montrer que

$$E = \mathrm{Im} f_1 \oplus \mathrm{Im} f_2 \oplus \cdots \oplus \mathrm{Im} f_p$$

$\forall x \in E, x = \sum_{k=1}^{p} f_k(x)$ donc $E = \sum_{k=1}^{p} \mathrm{Im}(f_k)$.
Montrons que la somme est directe, en montrant l'unicité de la décomposition de 0_E :
Soit $(x_1, \cdots, x_p) \in \mathrm{Im}(f_1) \times \cdots \times \mathrm{Im}(f_p)$ tel que $\sum_{k=1}^{p} x_k = 0$.
$\forall k \in [\![1,p]\!], x_k \in \mathrm{Im}(f_k)$ donc $\exists a_k \in E, x_k = f_k(a_k)$.
On a : $\sum_{k=1}^{p} f_k(a_k) = 0$, donc $\forall i \in [\![1,p]\!], f_i\left(\sum_{k=1}^{p} f_k(a_k)\right) = \sum_{k=1}^{p} (f_i \circ f_k)(a_k) = f_i \circ f_i(a_i) = f_i(a_i) = 0$,
c'est-à-dire $x_i = 0$, d'où l'unicité.

5. Montrer que la famille $\{\mathrm{Id}_E, f, f^2, \cdots, f^{p-1}\}$ est libre.

Soit $(\lambda_1, \cdots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que $\sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k f^k = 0$.

D'après la question 2, on a : $0 = \sum_{k=0}^{p-1} \left(\lambda_k \sum_{i=1}^{p} \alpha_i^k f_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k \alpha_i^k\right) f_i$.

Comme la famille $\{f_1, \cdots, f_p\}$ est libre, on en déduit que $\forall i \in [\![1,p]\!], \sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k \alpha_i^k = 0$.

Considérons le polynôme $\sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k X^k$; il est de degré $p-1$ et admet au moins p racines (les α_i), il est donc nul, c'est-à-dire $\forall k \in [\![0, p-1]\!], \lambda_k = 0$. La famille $\{\mathrm{Id}_E, f, f^2, \cdots, f^{p-1}\}$ est donc libre.

6. Pour $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, on définit l'endomorphisme $P(f)$ par : $P(f) = \sum_{k=0}^{d} a_k f^k$.

Pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, on note $P_i = \prod_{\substack{1 \leq k \leq p \\ k \neq i}} \dfrac{X - \alpha_k}{\alpha_i - \alpha_k}$.

Montrer que pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, P_i est le seul polynôme de $\mathbb{K}_{p-1}[X]$ vérifiant $P_i(f) = f_i$.

Soit $i \in [\![1,p]\!]$. On note $P_i = \sum_{k=0}^{p-1} c_{i,k} X^k$.

On a : $P_i(f) = \sum_{k=0}^{p-1} c_{i,k} \left(\sum_{j=1}^{p} \alpha_j^k f_j\right) = \sum_{j=1}^{p} \left(\sum_{k=0}^{p-1} c_{i,k} \alpha_j^k\right) f_j = \sum_{j=1}^{p} P_i(\alpha_j) f_j$.
Or, par définition de P_i on a : $P_i(\alpha_i) = 1$, et si $j \neq i, P_i(\alpha_j) = 0$, d'où, $P_i(f) = f_i$.
Montrons l'unicité :
Soit $i \in [\![1,p]\!]$, on suppose que le polynôme $Q_i \in \mathbb{K}_{p-1}[X]$ vérifie $Q_i(f) = f_i$.
On considère le polynôme $\Delta_i = P_i - Q_i$. C'est un polynôme de degré au plus $p-1$, vérifiant $\Delta_i(f) = 0$.
Or la famille $\{\mathrm{Id}_E, f, f^2, \cdots, f^{p-1}\}$ est libre, donc $\Delta_i = 0$ ce qui montre l'unicité.