

Math. - CC 2 - S1 - Algèbre

vendredi 16 novembre 2018 - Durée 1 h

Toutes les réponses seront justifiées. La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction.

Exercice 1

Soit α un réel. On considère la matrice A à coefficients réels définie par

$$A = \begin{pmatrix} 2 + \alpha & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 4 + \alpha \end{pmatrix}$$

1. Montrer qu'il existe une unique valeur de α telle que 5 soit une valeur propre de A .
On suppose que α prend désormais la valeur déterminée à la question précédente.
2. Déterminer le spectre de A .
3. Vérifier le résultat de la question précédente en considérant $\text{Tr}(A)$ et $\det(A)$.
4. La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

Exercice 2

Soit a, c deux réels tels que $c \neq 0$. On considère la matrice B à coefficients réels définie par

$$B = \begin{pmatrix} a + c & 0 & c \\ 0 & a + 2c & 0 \\ c & 0 & a + c \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le spectre de B .
2. Vérifier le résultat de la question précédente en considérant $\text{Tr}(B)$.
3. Montrer que B est diagonalisable.
4. Déterminer une matrice D diagonale, de la forme $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$, où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, et une matrice inversible P de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $P^{-1}BP = D$.
5. Calculer alors B^n , $n \in \mathbb{N}$.

Fin de l'énoncé d'algèbre