- CC2-S1 - - 2018-2019 -

– Correction - Algèbre –

Exercice 1

Soit α un réel. On considère la matrice A à coefficients réels définie par

$$A = \begin{pmatrix} 2+\alpha & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 4+\alpha \end{pmatrix}$$

1. Montrer qu'il existe une unique valeur de α telle que 5 soit une valeur propre de A.

5 est valeur propre de A si et seulement si $A - 5\mathrm{I}_3$ est non inversible, ce qui équivaut à $\det(A - 5\mathrm{I}_3) = 0$.

Or $\det(A - 5\mathrm{I}_3) = \begin{vmatrix} \alpha-3 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & \alpha-1 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & \alpha-1 \end{vmatrix} = 4(1-\alpha)$ donc 5 est valeur propre de A si et seulement si $\alpha = 1$.

On suppose que α prend désormais la valeur déterminée à la question précédente.

2. Déterminer le spectre de A.

Avec $\alpha = 1$, $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ et le polynôme caractéristique de A est :

$\chi_A = \det(XI_3 - A) = \begin{vmatrix} X-3 & -2 & -2 \\ -2 & X-5 & 0 \\ -2 & 0 & X-5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X-7 & -2 & -2 \\ X-7 & X-5 & 0 \\ X-7 & 0 & X-5 \end{vmatrix} = (X-7)\begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & X-5 & 0 \\ 1 & 0 & X-5 \end{vmatrix} =$

$(X-7)\begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & X-3 & 2 \\ 0 & 2 & X-3 \end{vmatrix} = (X-7)\begin{vmatrix} X-3 & 2 \\ 2 & X-3 \end{vmatrix} = (X-7)((X-3)^2-4) = (X-7)(X-1)(X-5)$.

Le spectre de A dans $\mathbb{R}$ est l'ensemble des racines de χ_A dans $\mathbb{R}$, c'est à dire $\mathrm{Sp}(A) = \{1, 5, 7\}$.

3. Vérifier le résultat de la question précédente en considérant $\mathrm{Tr}(A)$ et $\det(A)$.

χ_A est scindé dans $\mathbb{R}$ donc la somme des valeurs propres (comptées avec multiplicité) de A vaut la trace de A et le produit des valeurs propres (comptées avec multiplicité) de A vaut le déterminant de A. Ce qui est vérifié puisque :

D'une part $1 + 5 + 7 = 13$ et $\mathrm{Tr}(A) = 3 + 5 + 5 = 13$.

D'autre part $1 \times 5 \times 7 = 35$ et $\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 2 \times (-10) + 5 \times 11 = 35$.

4. La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$?

χ_A est scindé et à racines simples dans $\mathbb{R}$ donc A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 2

Soit a, c deux réels tels que $c \neq 0$. On considère la matrice B à coefficients réels définie par

$$B = \begin{pmatrix} a+c & 0 & c \\ 0 & a+2c & 0 \\ c & 0 & a+c \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le spectre de B.

Le polynôme caractéristique de B est :
$\chi_B = \det(XI_3 - B) = \begin{vmatrix} X-a-c & 0 & -c \\ 0 & X-a-2c & 0 \\ -c & 0 & X-a-c \end{vmatrix} = (X-a-2c)\begin{vmatrix} X-a-c & -c \\ -c & X-a-c \end{vmatrix}$
$= (X-a-2c)\left((X-a-c)^2 - c^2\right) = (X-a-2c)(X-a-2c)(X-a) = (X-a-2c)^2(X-a)$.
Le spectre de B dans $\mathbb{R}$ est l'ensemble des racines de χ_B dans $\mathbb{R}$, et puisque $c \neq 0$ implique $a+2c \neq a$, on obtient $\mathrm{Sp}(B) = \{a, a+2c\}$ (a est simple alors que $a+2c$ est double).

2. Vérifier le résultat de la question précédente en considérant $\mathrm{Tr}(B)$.

χ_B est scindé dans $\mathbb{R}$ donc la somme des valeurs propres (comptées avec multiplicité) de B vaut la trace de B. Ce qui est vérifié puisque $a + (a+2c) + (a+2c) = 3a+4c$ et $\mathrm{Tr}(B) = (a+c) + (a+2c) + (a+c) = 3a+4c$.

3. Montrer que B est diagonalisable.

B possède deux sous-espaces propres distincts : $E_a(B) = \mathrm{Ker}(B - a\mathrm{I}_3)$ et $E_{a+2c}(B) = \mathrm{Ker}(B-(a+2c)\mathrm{I}_3)$.
a est valeur propre simple donc $\dim(E_a(B) = 1$.
$a+2c$ est valeur propre double et $\dim(E_a(B)) = \dim(\mathrm{Ker}(B-(a+2c)\mathrm{I}_3)) = 3 - \mathrm{rg}(B-(a+2c)\mathrm{I}_3)$.
$B - (a+2c)\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} -c & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & -c \end{pmatrix}$ donc, puisque $c \neq 0$, $\mathrm{rg}(B-(a+2c)\mathrm{I}_3) = 1$ puis $\dim(E_{a+2c}(B)) = 2$.
On peut conclure que B est diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

4. Déterminer une matrice D diagonale, de la forme $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$, où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, et une matrice inversible P de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $P^{-1}BP = D$.

B est diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, et semblable à $D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a+2c & 0 \\ 0 & 0 & 2c \end{pmatrix}$, d'après ce qui précède. Il existe donc une matrice P inversible de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}BP = D$, et P est la matrice de passage de la base canonique à une base $\mathscr{B} = (u, v, w)$ où u est un vecteur propre associé à la valeur propre a, et v, w sont des vecteurs propres associés à la valeur propre $a+2c$. Reste à déterminer les sous-espaces propres.
$B - (a+2c)\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} -c & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & -c \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et donc $E_{a+2c}(B) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.
$B - a\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} c & 0 & c \\ 0 & 2c & 0 \\ c & 0 & c \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et donc $E_a(B) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$. Finalement $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

5. Calculer alors B^n, $n \in \mathbb{N}$.

Puisque $P^{-1}BP = D$, on tire $B = PDP^{-1}$, puis $\forall n \in \mathbb{N},\ B^n = PD^nP^{-1}$.
Le calcul de $P^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ se fait par l'algorithme de Gauss.

Enfin par produit matriciel, on conclut que $B^n = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} (a+2c)^n + a^n & 0 & (a+2c)^n - a^n \\ 0 & 2(a+2c)^n & 0 \\ (a+2c)^n - a^n & 0 & (a+2c)^n + a^n \end{pmatrix}$