- CC3-S1 - - 2018-2019 -

– CORRECTION - ALGÈBRE –

Exercice 1

Dans $E = \mathbb{R}^4$, muni du produit scalaire canonique, on considère les vecteurs :

$$u_1 = (1, 0, 1, 0),\ u_2 = (1, -1, 0, 0),\ \text{ et }\ u_3 = (1, 1, 1, 1).$$

On note $F = \text{Vect}(u_1, u_2, u_3)$.

1. Vérifier que (u_1, u_2, u_3) est une base de F.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$, tel que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0$; on a : $\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$ donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, et la famille (u_1, u_2, u_3) est libre. Par définition, c'est une famille génératrice de F, c'en est donc une base.

2. Déterminer une base de $F^\perp$.

$a = (x, y, z, t) \in F^\perp \Leftrightarrow (a|u_1) = (a|u_2) = (a|u_3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ x - y = 0 \\ x + y + z + t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = x(1, 1, -1, -1).$

Ainsi, $F^\perp = \text{Vect}\{(1, 1, -1, -1)\}$.

3. Déterminer une base orthonormée de F.

On orthonormalise la base (u_1, u_2, u_3) en (v_1, v_2, v_3) par le procédé de Gram Schmidt :

$\|u_1\| = \sqrt{2}$, on prend $v_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} u_1$

Soit $w_2 = u_2 - (u_2|v_1)v_1 = \dfrac{1}{2}(1, -2, -1, 0)$; $\|w_2\|^2 = \dfrac{3}{2}$. On prend $v_2 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, -1, 0)$.

Soit $w_3 = u_3 - (u_3|v_1)v_1 - (u_3|v_2)v_2 = \dfrac{1}{3}(1, 1, -1, 3)$; $\|w_3\|^2 = \dfrac{4}{3}$. On prend $v_3 = \dfrac{\sqrt{3}}{6}(1, 1, -1, 3)$.

4. Déterminer la projection orthogonale sur F de $v = (1, 1, 1, 0)$ de deux façons différentes.

On a : $p_F(v) = (v|v_1)v_1 + (v|v_2)v_2 + (v|v_3)v_3 = \dfrac{1}{4}(3, 3, 5, 1)$.

D'autre part, une base orthonormée de $F^\perp$ est donnée par $u_0 = \dfrac{1}{2}(1, 1, -1, -1)$, donc

$p_F(v) = v - p_{F^\perp}(v) = v - (v|u_0)u_0 = \dfrac{1}{4}(3, 3, 5, 1)$.

5. Calculer la distance de v à F.

$d(v, F) = \|p_{F^\perp}(v)\| = |(v|u_0)| = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 2

On considère l'espace vectoriel $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre $n \geq 2$.
Pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on note $\text{Tr}(A)$ la trace de la matrice A. On définit l'application φ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall (A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2,\ \varphi(A, B) = \text{Tr}(A\,{}^tB)$$

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Pour tout $(M, N) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2$, on a les propriétés suivantes : ${}^t(MN) = {}^tN\,{}^tM, \text{Tr}({}^tM) = \text{Tr}(M)$.
On en déduit que $\varphi(M, N) = \text{Tr}(M\,{}^tN) = \text{Tr}({}^t(N\,{}^tM)) = \text{Tr}(N\,{}^tM) = \varphi(N, M)$, donc φ est symétrique ;
la trace étant une forme linéaire, on en déduit que φ est linéaire par rapport à sa première composante, donc bilinéaire par symétrie.

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$; $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, (A^tA)_{ij} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{jk}$ donc $\varphi(A, A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2 \geq 0$.

De plus, $\varphi(A, A) = 0 \Leftrightarrow \forall (i, k) \in [\![1, n]\!]^2, a_{ik}^2 = 0 \Leftrightarrow A = 0$.
φ est donc une forme définie positive.
Finalement φ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

2. a. Enoncer l'inégalité de Cauchy Schwarz pour le produit scalaire φ.
$\forall (A,B)\in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2, |\varphi(A,B)| \leq \sqrt{\varphi(A,A)\varphi(B,B)}$

b. Soit $A=(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n)}\in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$; montrer que :

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\right| \leq n\times\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}$$

On applique l'inégalité de Cauchy Schwarz ne prenant pour B la matrice dont tous les coefficients valent 1 :
On a $\forall (i,j)\in [\![1,n]\!]^2, (A\,{}^tB)_{ij}=\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik},\ (A\,{}^tA)_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{jk},\ (B\,{}^tB)_{ij}=\sum_{k=1}^{n} 1=n.$
Ainsi, $\varphi(A,B)=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}, \varphi(A,A)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2, \varphi(B,B)=\sum_{i=1}^{n} n=n^2$ on obtient donc le résultat attendu.

3. On suppose désormais que $n=2$. On appelle F le sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ défini par

$$F=\left\{\begin{pmatrix} a & b\\ b & -a\end{pmatrix} ; (a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$$

a. Donner une base de $F^{\perp}$.
On note $M_1=\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ et $M_2=\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$; on a : $F=\mathrm{Vect}(M_1,M_2)$.
$M=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in F^{\perp}\Leftrightarrow \varphi(M,M_1)=\varphi(M,M_2)=0\Leftrightarrow \begin{cases} a-d=0\\ b+c=0\end{cases}.$
On en déduit que $F^{\perp}=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\right)$.

b. Déterminer l'image de la matrice $A=\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ par la projection orthogonale sur F.
Orthonormalisons la base (M_1,M_2) de F en (N_1,N_2) :
On a $\|M_1\|^2=2$ donc on prend $N_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}M_1$.
$\mathrm{Tr}(M_1\,{}^tM_2)=0$ donc M_1 et M_2 sont orthogonales ; $\|M_2\|^2=2$ donc on prend $N_2\dfrac{1}{\sqrt{2}}M_2$.
On a : $p_F(A)=\varphi(A,N_1)N_1+\varphi(A,N_2)N_2=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$