

Analyse

Toutes les réponses seront justifiées. La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction.

1. a) Démontrer que le rayon de convergence de $\sum z^n$ vaut 1.

b) Démontrer que le rayon de convergence de $\sum \frac{z^n}{n}$ vaut 1.

c) Pour tout $x \in]-1 ; 1[$, exprimer

$$S_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \quad \text{et} \quad S_2(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$$

en fonction de x .

2. a) Justifier que pour tout $x \in]-1 ; 1[$,

$$\frac{\ln(1-x)}{x-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right) x^n$$

b) Déterminer le rayon de convergence de la série entière

$$\sum \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right) x^n$$

3. On note pour $x \in]-1 ; 1[$,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right) x^n$$

a) Démontrer que pour tout $x \in]-1 ; 1[$,

$$f(x) - xf(x) = S_2(x)$$

b) Retrouver le résultat de la question 2.a)

4. Soit (a_n) une suite de réels strictement positifs. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, b_n = \sum_{k=0}^n a_k$$

On note alors R_a et R_b les rayons de convergence respectifs de $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$.

a) Montrer que

$$R_b \geq \min(R_a, 1)$$

b) Montrer que si (a_n) converge vers 0 et $\sum a_n$ diverge alors

$$R_a = 1 \quad \text{puis} \quad R_b = 1$$

5. On pose, pour tout $x \in]-1 ; 1[$,

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

où (a_n) est une suite de réels strictement positifs telle que (a_n) converge vers 0 et $\sum a_n$ diverge. Démontrer que pour tout $x \in]-1 ; 1[$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n = \frac{g(x)}{1-x}$$

1. a) Démontrer que le rayon de convergence de $\sum z^n$ vaut 1.

Il s'agit de la série géométrique de raison z , et cette dernière converge si, et seulement si, $|z| < 1$. Par conséquent, son rayon de convergence est 1. On peut aussi appliquer le critère de D'Alembert ou le lemme d'Abel.

- b) Démontrer que le rayon de convergence de $\sum \frac{z^n}{n}$ vaut 1.

$\sum \frac{z^n}{n}$ et $\sum n \times \frac{z^n}{n} = \sum z^n$ ont le même rayon de convergence. Par suite, le rayon de convergence de $\sum \frac{z^n}{n}$ est 1. On peut aussi appliquer le critère de D'Alembert.

- c) Pour tout $x \in]-1; 1[$, exprimer

$$S_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \quad \text{et} \quad S_2(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$$

en fonction de x .

$$\forall x \in]-1; 1[, S_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \text{et} \quad S_2(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x).$$

2. a) Justifier que pour tout $x \in]-1; 1[$,

$$\frac{\ln(1-x)}{x-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right) x^n$$

$\forall x \in]-1; 1[$, $\sum x^n$ et $\sum \frac{x^n}{n}$ convergent absolument donc la série produit de Cauchy de ces deux dernières converge absolument et donc, a pour rayon de convergence $R \geq 1$. De plus, $\forall x \in]-1; 1[$,

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right) \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}\right) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} x^{n-k} \frac{x^{k+1}}{k+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1}\right) x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1}\right) x^n$$

On a donc bien, compte tenu de la question 1.c) :

$$\forall x \in]-1; 1[, \frac{\ln(1-x)}{x-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right) x^n$$

- b) Déterminer le rayon de convergence de la série entière

$$\sum \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right) x^n$$

De la question précédente, le rayon de convergence R de la série entière $\sum \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right) x^n$ vérifie $R \geq 1$. De plus, $\sum \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right) 1^n = \sum \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right)$ diverge grossièrement, donc $R \leq 1$. Par conséquent, $R = 1$. On peut aussi, encore une fois, appliquer le critère de D'Alembert.

3. On note pour $x \in]-1; 1[$,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right) x^n$$

a) Démontrer que pour tout $x \in]-1; 1[$,

$$f(x) - xf(x) = S_2(x)$$

$$\forall x \in]-1; 1[, f(x) - xf(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} \right) x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} \right) x^{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \right) x^{n+1} - \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} \right) x^{n+1}$$

$$\text{donc } \forall x \in]-1; 1[, f(x) - xf(x) = x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = S_2(x).$$

b) Retrouver le résultat de la question 2.a)

On a, pour $x \in]-1; 1[$, $f(x) - xf(x) = S_2(x) = -\ln(1-x)$, c'est à dire $(1-x)f(x) = -\ln(1-x)$ ou encore

$$f(x) = \frac{-\ln(1-x)}{1-x} = \frac{\ln(1-x)}{x-1}, \text{ ce qui est le résultat attendu.}$$

4. Soit (a_n) une suite de réels strictement positifs. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, b_n = \sum_{k=0}^n a_k$$

On note alors R_a et R_b les rayons de convergence respectifs de $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$.

a) Montrer que

$$R_b \geq \min(R_a, 1)$$

$\sum z^n$ a pour rayon de convergence 1 et $\sum a_n z^n$ a pour rayon de convergence R_a , donc elles convergent absolument et simultanément pour $|z| < \min(R_a, 1)$. Par conséquent la série produit de Cauchy de ces deux dernières converge absolument pour $|z| < \min(R_a, 1)$, et donc, a pour rayon de convergence $R \geq \min(R_a, 1)$.
De plus, $\forall |z| < \min(R_a, 1)$,

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n 1 \times a_k \right) x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$$

On peut conclure que $R = R_b$ et qu'on a bien $R_b \geq \min(R_a, 1)$.

b) Montrer que si (a_n) converge vers 0 et $\sum a_n$ diverge alors

$$R_a = 1 \quad \text{puis} \quad R_b = 1$$

Puisque (a_n) converge vers 0, on en déduit que $(a_n 1^n)$ est bornée et, par le lemme d'Abel, $R_a \geq 1$. Mais $\sum a_n = \sum a_n 1^n$ diverge donc $R_a \leq 1$. On conclut que $R_a = 1$.

D'après 4.a), $R_b \geq 1$ mais $(b_n) = \left(\sum_{k=0}^n a_k \right)$ diverge donc $\sum b_n = \sum b_n 1^n$ diverge grossièrement ; par conséquent $R_b \leq 1$, puis $R_b = 1$. On peut toujours et encore appliquer le critère de D'Alembert ou remarquer que $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq b_n$ et donc $R_b \leq R_a$.

5. On pose, pour tout $x \in]-1 ; 1[$,

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

où (a_n) est une suite de réels strictement positifs telle que (a_n) converge vers 0 et $\sum a_n$ diverge. Démontrer que pour tout $x \in]-1 ; 1[$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n = \frac{g(x)}{1-x}$$

$$R_a = R_b = 1 \text{ donc } \forall x \in]-1 ; 1[, \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n - x \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} b_{n-1} x^n = b_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n \text{ donc } \forall x \in]-1 ; 1[, \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n - x \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n = g(x). \text{ Soit encore } \forall x \in]-1 ; 1[, (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n = g(x) \text{ puis } \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n = \frac{g(x)}{1-x}. \text{ On peut aussi utiliser un produit de Cauchy.}$$