⋆ Spé - St Joseph/ICAM Toulouse ⋆

Math. - CC 1 - S1 - Algèbre

vendredi 04 octobre 2019 - Durée 1 h

Toutes les réponses seront justifiées. La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction.

1. Soient $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3), \lambda \in \mathbb{R}$ et $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$ l'application identité de $\mathbb{R}^3$.

a. Montrer que $\mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ est stable par u.

b. Montrer alors que l'endomorphisme induit par u sur $\mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ est une homothétie.

2. On considère l'endomorphisme $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associé à

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

On note I_3 la matrice identité de $\mathbb{R}^3$.

a. Montrer que

$$\det(\lambda \mathrm{I}_3 - A) = (\lambda - 4)(\lambda - 1)^2$$

b. En déduire les valeurs de λ pour lesquelles $u - \lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$ n'est pas bijective.

c. Montrer que

$$\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(u - 4\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) \oplus \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$$

d. Déterminer la matrice de u dans la base adaptée à la décomposition précédente.

3. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, avec $b \neq 0$. On considère l'endomorphisme $vin\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associé à

$$B = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$$

a. Calculer

$$\det(\lambda \mathrm{I}_3 - B)$$

b. En déduire les valeurs de λ pour lesquelles $v - \lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$ n'est pas bijective.
On note λ_1 et λ_2 ces valeurs.

c. Montrer que

$$\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(v - \lambda_1 \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) \oplus \mathrm{Ker}(v - \lambda_2 \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$$

d. Déterminer la matrice de v dans une base adaptée à la décomposition précédente.

Fin de l'énoncé d'algèbre