- CC1-S1 - - 2019-2020 -

– Correction - Algèbre –

1. Soient $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3), \lambda \in \mathbb{R}$ et $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$ l'application identité de $\mathbb{R}^3$.

a. Montrer que $\mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ est stable par u.
Soit $x \in \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$; on a $(u - \lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})(x) = 0$ donc $u(x) = \lambda x \in \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$, car $\mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$; d'où la stabilité.

b. Montrer alors que l'endomorphisme induit par u sur $\mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ est une homothétie.
Par définition de $\mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$, pour tout $x \in \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}), u(x) = \lambda x$.
La restriction de u à $\mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ est donc l'homothétie de rapport λ.

2. On considère l'endomorphisme $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associé à

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

On note I_3 la matrice identité de $\mathbb{R}^3$.

a. Montrer que

$$\det(\lambda \mathrm{I}_3 - A) = (\lambda - 4)(\lambda - 1)^2$$

$$\det(\lambda \mathrm{I}_3 - A) = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda-2 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} \underset{C_1 \leftarrow C_1+C_2+C_3}{=} \begin{vmatrix} \lambda-4 & -1 & -1 \\ \lambda-4 & \lambda-2 & -1 \\ \lambda-4 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-4) \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & \lambda-2 & -1 \\ 1 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix}$$
$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{=} (\lambda-4) \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-4)(\lambda-1)^2$$

b. En déduire les valeurs de λ pour lesquelles $u - \lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$ n'est pas bijective.
$u - \lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$ n'est pas bijective si et seulement si $\det(\lambda \mathrm{I}_3 - A) = 0$, ce qui équivaut d'après la question précédente à $\lambda \in \{1, 4\}$.

c. Montrer que

$$\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(u - 4\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) \oplus \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$$

$x \in \mathrm{Ker}(u - 4\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) \cap \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ si, et seulement si $u(x) = 4x$ et $u(x) = x$, ce qui équivaut à $x = 0$ donc la somme est directe.
$A - 4\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc
$\mathrm{Ker}(u - 4\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}\{\underbrace{(1,1,1)}_{e_1}\}$;

$A - \mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}\{\underbrace{(1,-1,0)}_{e_2}, \underbrace{(1,0,-1)}_{e_3}\}$.
Ainsi, $\dim(\mathrm{Ker}(u - 4\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) + \dim(\mathrm{Ker}(u - 4\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = 3$, donc on a $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(u - 4\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) \oplus \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$.

d. Déterminer la matrice de u dans la base adaptée à la décomposition précédente.
Par construction, $u(e_1) = 4e_1, u(e_2) = e_2$ et $u(e_3) = e_3$. Ainsi, dans la base (e_1, e_2, e_3) la matrice de u est : $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, avec $b \neq 0$. On considère l'endomorphisme $v \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associé à

$$B = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$$

a. Calculer
$$\det(\lambda \mathrm{I}_3 - B)$$
$$\det(\lambda\mathrm{I}_3-B) = \begin{vmatrix} \lambda-a & -b & -b \\ -b & \lambda-a & -b \\ -b & -b & \lambda-a \end{vmatrix} \underset{C_1\leftarrow C_1+C_2+C_3}{=} \begin{vmatrix} \lambda-a-2b & -b & -b \\ \lambda-a-2b & \lambda-a & -b \\ \lambda-a-2b & -b & \lambda-a \end{vmatrix} = (\lambda-a-2b)\begin{vmatrix} 1 & -b & -b \\ 1 & \lambda-a & -b \\ 1 & -b & \lambda-a \end{vmatrix}$$
$$\underset{\substack{L_2\leftarrow L2-L1\\ L_3\leftarrow L_3-L_1}}{=} (\lambda-a-2b)\begin{vmatrix} 1 & -b & -b \\ 0 & \lambda-a+b & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-a+b \end{vmatrix} = (\lambda-a-2b)(\lambda-a+b)^2$$

b. En déduire les valeurs de λ pour lesquelles $v-\lambda\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$ n'est pas bijective.
$v-\lambda\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$ n'est pas bijective si et seulement si $\det(\lambda\mathrm{I}_3-B)=0$, ce qui équivaut d'après la question précédente à $\lambda\in\{a+2b, a-b\}$. On note λ_1 et λ_2 ces valeurs.

c. Montrer que
$$\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(v-\lambda_1\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) \oplus \mathrm{Ker}(v-\lambda_2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$$

$x\in\mathrm{Ker}(v-(a+2b)\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})\cap\mathrm{Ker}(u-(a-b)\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ si, et seulement si $u(x)=(a+2b)x$ et $u(x)=(a-b)x$ ce qui équivaut à $3bx=0$ donc à $x=0$ car $b\neq 0$; la somme est donc directe.

$B-(a+2b)\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} -2b & b & b \\ b & -2b & b \\ b & b & -2b \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (car $b\neq 0$), donc

$\mathrm{Ker}(v-(a+2b)\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}\{\underbrace{(1,1,1)}_{e_1}\}$;

$B-(a-b)\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} b & b & b \\ b & b & b \\ b & b & b \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\mathrm{Ker}(v-\ (a-b)\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}\{\underbrace{(1,1,0)}_{e_2}, \underbrace{(1,0,1)}_{e_3}\}$.

Ainsi, $\dim(\mathrm{Ker}(v-(a+2b)\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) + \dim(\mathrm{Ker}(u-(a+b)\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = 3$, donc on a
$\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(u-(a+2b)\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) \oplus \mathrm{Ker}(u-(a-b)\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$.

d. Déterminer la matrice de v dans une base adaptée à la décomposition précédente.

Par construction, $u(e_1)=(a+2b)e_1, u(e_2)=(a-b)e_2$ et $u(e_3)=(a-b)e_3$. Ainsi, dans la base (e_1,e_2,e_3) la matrice de v est : $\begin{pmatrix} a+2b & 0 & 0 \\ 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & a-b \end{pmatrix}$.