$\star$ Spé - St Joseph/ICAM Toulouse $\star$

Math. - CC 2 - S1 - Algèbre

vendredi 22 novembre 2019 - Durée 1 h

Toutes les réponses seront justifiées. La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction.

EXERCICE 1

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que la matrice A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

2. Montrer qu'il existe deux matrices M et N telles que pour tout entier naturel n,

$$A^n = 2^n M + 4^n N$$

3. Déterminer M et N.

4. Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^{2n}}{(2n)!}$.

EXERCICE 2

On considère la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. La matrice B est-elle diagonalisable dans $\mathbb{R}$?

2. Montrer que B est semblable à la matrice

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Calculer B^n pour $n \in \mathbb{N}$, en remarquant que $T = \mathrm{I}_3 + N$, avec N matrice nilpotente.

4. Justifier que B est inversible, et déterminer B^{-n} pour $n \in \mathbb{N}$.

Fin de l'énoncé d'algèbre