- CC3-S1 - - 2019-2020 -

– Correction - Algèbre –

Dans tout l'exercice, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

Partie 1 - Produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$

Pour tout couple $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$, on note :

$$(P|Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$$

1. Justifier que l'intégrale définissant $(P|Q)$ est convergente.

Pour tous les polynômes P et Q, $t \mapsto P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}$ est continue sur $[0, +\infty[$.

Par croissances comparées, on a $\lim\limits_{t\to+\infty} P(t)Q(t)t^2\mathrm{e}^{-t} = 0$ donc $P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t} = o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.

Par comparaison à une intégrale de Riemann convergente sur $[1, +\infty[$, on en déduit que $\displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ converge.

2. Montrer alors que l'application $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

- $(\cdot|\cdot)$ est clairement symétrique.
- Par linéarité des intégrales généralisées, $(\cdot|\cdot)$ est linéaire par rapport à sa première variable, donc bilinéaire par symétrie.
- Par positivité de l'intégrale, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X], (P|P) \geq 0$, et la fonction $t \mapsto P(t)^2\mathrm{e}^{-t}$ étant continue sur $[0, +\infty[$, $(P|P) = 0 \Leftrightarrow \forall t \in [0, +\infty[, P(t)^2\mathrm{e}^{-t} = 0$ donc $P(t) = 0$ pour $t \in [0, +\infty[$; le polynôme P admettant une infinité de racines, il est nul.
  $(\cdot|\cdot)$ est donc définie positive.

$(\cdot|\cdot)$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive, c'est donc un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

3. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\int_0^{+\infty} t^k\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = k\int_0^{+\infty} t^{k-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$$

Soient $u : t \mapsto -\mathrm{e}^{-t}$ et $v : t \mapsto t^k$. u et v sont de classe C^∞ sur $[0, +\infty[$. De plus, par croissances comparées, $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t)v(t) = 0$, donc le théorème d'intégration par parties donne $\displaystyle\int_0^{+\infty} u'(t)v(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} u(t)v'(t)\mathrm{d}t$ de même nature (convergentes d'après la question 1) et, pour $k \geq 1$:

$$\int_0^{+\infty} t^k\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \left[-\mathrm{e}^{-t}t^k\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} kt^{k-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = k\int_0^{+\infty} t^{k-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$$

4. Conclure que :

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ (X^k|1) = k!$$

La question précédente donne : $\forall k \in [\![1, n]\!], (X^k|1) = k(X^{k-1}|1)$, donc par télescopage

$$(X^k|1) = k!(1|1) = k!\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = k!\left[-\mathrm{e}^{-t}\right]_0^{+\infty} = k!$$

Partie 2 - Construction d'une base orthogonale

On considère l'application u définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ u(P) = XP'' + (1-X)P'$$

1. a. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Par linéarité de l'opérateur de dérivation, u est linéaire. De plus :

- si $\deg(P) = 0$, alors $u(P) = 0 \in \mathbb{R}_n[X]$,
- si $\deg(P) = 1$ (avec $n \geq 1$), alors $u(P) = (1-X)P'$ avec $\deg(P') = 0$ donc $\deg(u(P)) = 1$ et $u(P) \in \mathbb{R}_n[X]$,
- si $\deg(P) = p \geq 2$ (avec $n \geq p$), alors $\deg(P'') = p-2$, $\deg(P') = p-1$ donc $\deg(u(P)) \leq p$ et $u(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.

Ainsi, u est bien un endomorphisme sur $\mathbb{R}_n[X]$.

b. Ecrire la matrice de u dans la base $(1, X, X^2, \cdots X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.

Soit $k \in [\![0, n]\!]$; $u(X^k) = -kX^k + k^2X^{k-1}$. On en déduit la matrice de u dans la base canonique :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 4 & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & -2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & n^2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -n \end{pmatrix}$$

c. En déduire que u est diagonalisable et que le spectre de u est

$$\mathrm{Sp}(u) = \{-k,\ k \in [\![0, n]\!]\}$$

La matrice de u étant triangulaire, on obtient immédiatement le polynôme caractéristique : $\chi_u = \prod_{k=0}^{n}(X+k)$.

Il est scindé à racines simples, on en déduit que u est diagonalisable et que son spectre est bien $\mathrm{Sp}(u) = \{-k,\ k \in [\![0, n]\!]\}$.

2. On fixe $k \in [\![0, n]\!]$.

a. Quelle est la dimension de $\mathrm{Ker}\left(u + k\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}\right)$?

Chaque valeur propre est de multiplicité 1, donc chaque espace propre $E_{-k} = \mathrm{Ker}\left(u + k\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}\right)$ est de dimension 1.

b. En déduire qu'il existe un unique polynôme $P_k \in \mathbb{R}_n[X]$, de coefficient dominant égal à 1, vérifiant

$$u(P_k) = -kP_k$$

Chaque espace propre a pour dimension 1, tous ses vecteurs sont donc colinéaires. Il en existe un seul dont le coefficient dominant est 1 (il suffit de prendre l'un d'entre eux et de le diviser par son coefficient dominant). Ainsi il existe un unique polynôme $P_k \in \mathbb{R}_n[X]$ de coefficient dominant 1, qui engendre E_{-k} et vérifie donc $u(P_k) = -kP_k$.

c. Justifier que le degré de P_k est k.

On note d le degré de P_k et $P_k = X^d + R$ avec $\deg(R) < d$, la division euclidienne de P_k par X^d. On a :

$$\begin{aligned} u(P_k) = -kP_k \quad &\Leftrightarrow \quad d(d-1)X^{d-1} + XR'' + (1-X)dX^{d-1} + (1-X)R' = -kX^d - kR \\ &\Leftrightarrow \quad (-d+k)X^d + d^2X^{d-1} + XR'' + (1-X)R' + kR = 0 \end{aligned}$$

avec $\deg(d^2X^{d-1} + XR'' + (1-X)R' + kR) < d$, on en déduit que $d = k$.

d. Déterminer P_0, P_1, et vérifier que $P_2 = X^2 - 4X + 2$.

P_0 est un polynôme unitaire constant, donc $P_0 = X^0$.
On a : $P_1 = X + a$ et $u(P_1) = -P_1$ donc $(1 - X) = -X - a$, d'où $P_1 = X - 1$.
On a $P_2 = X^2+aX+b$, et $u(P_2) = -2P_2$ donc $2X+(1-X)(2X+a) = -2X^2-2aX-2b$ d'où $P_2 = X^2-4X+2$.

3. On fixe un couple $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$.

a. Montrer que

$$(u(P)|Q) = -\int_0^{+\infty} tP'(t)Q'(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$$

Notons tout d'abord que d'après la question 1 de la partie I, toutes les intégrales considérées sont convergentes, et on peut appliquer la linéarité des intégralités généralisées.
$(u(P)|Q) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(tP''(t) + (1-t)P'(t)\right) Q(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \left(tP''(t) + P'(t)\right) Q(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t - \int_0^{+\infty} tP'(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$.
Soient $f : t \mapsto tP'(t)$ (de dérivée $f' : t \mapsto tP''(t) + P'(t)$), et $g : t \mapsto Q(t)\mathrm{e}^{-t}$. f est g sont de classe C^∞ sur $[0, +\infty[$. De plus, par croissances comparées, $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)g(t) = 0$, donc le théorème d'intégration par parties donne $\displaystyle\int_0^{+\infty} f'(t)g(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)g'(t)\mathrm{d}t$ de même nature (convergentes) et :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \left(tP''(t) + P'(t)\right) Q(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t &= \left[tP'(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} tP'(t)\left(Q'(t) - Q(t)\right)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t \\ &= -\int_0^{+\infty} tP'(t)Q'(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} tP'(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Finalement, on obtient : $(u(P)|Q) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} tP'(t)Q'(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$

b. En déduire que

$$(u(P)|Q) = (P|u(Q))$$

Dans l'égalité démontrée précédemment P et Q ont des rôles clairement symétriques, on a donc $(u(P)|Q) = (P|u(Q))$.

c. Montrer que $(P_0, P_1, \cdots, P_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.

Soient $(k, l) \in [\![0, n]\!]^2$. On a :
$(u(P_k)|P_l) = -k(P_k|P_l) = (P_k|u(P_l) = -l(P_k|Pl)$; ainsi, $(k - l)(P_k|P_l) = 0$.

On en déduit que si $k \neq l, (P_k|P_l) = 0$ donc que la famille $(P_0, P_1, \cdots, P_n)$ est orthogonale sans polynôme nul, donc libre. Comme son cardinal est $n + 1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$, on en déduit que c'est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.