$\star$ Spé - St Joseph/ICAM Toulouse $\star$

Math. - CC 1 - S1 - Algèbre

vendredi 16 octobre 2020 - Durée 1 h

Toutes les réponses seront justifiées. La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction.

EXERCICE 1

On considère l'endomorphisme $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associé à

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que $\operatorname{Ker}(u - \operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3}) \oplus \operatorname{Ker}(u + \operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathbb{R}^3$.

2. Que peut-on en déduire concernant u ?

3. Comment peut-on obtenir ce résultat à l'aide d'un calcul matriciel ?

EXERCICE 2

On considère l'endomorphisme $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associé à

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On note $e_1 = (1, 0, 1), e_2 = (0, 1, 1)$ et $e_3 = (1, -1, 1)$.

1. Calculer $f(e_1)$.

2. Que peut-on en déduire concernant f ?

3. Comment peut-on démontrer directement ce résultat ?

4. Montrer que la famille (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

5. Déterminer la matrice de f dans la base (e_1, e_2, e_3).

6. En déduire la valeur de B^n, où $n \in \mathbb{N}^*$.

EXERCICE 3

Soir E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f une endomorphisme de E vérifiant

$$f^2 = \frac{1}{2}(f + \operatorname{Id}_E)$$

On définit l'application $p = \dfrac{2}{3}f + \dfrac{1}{3}\operatorname{Id}_E$

1. Montrer que p est un projecteur de E.

2. Montrer que $\operatorname{Im}(p) = \{x \in E / f(x) = x\}$.

3. On note q le projecteur sur $\operatorname{Ker}(p)$ parallèlement à $\operatorname{Im}(p)$.
Exprimer q comme une combinaison linéaire de f et Id_E.

4. En déduire que

$$E = \operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}_E) \oplus \operatorname{Ker}\left(f + \frac{1}{2}\operatorname{Id}_E\right)$$

Fin de l'énoncé d'algèbre