- CC1-S1 - - 2020-2021 -

– Correction - Algèbre –

Toutes les réponses seront justifiées. La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction.

EXERCICE 1
On considère l'endomorphisme $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associé à

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) \oplus \mathrm{Ker}(u + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathbb{R}^3$.
$\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}\{(1,1,0),(0,1,1)\}$ et $\mathrm{Ker}(u + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}\{(1,1,-2)\}$.
$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$; on en déduit que la concaténation des bases de $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ et $\mathrm{Ker}(u + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ donne une base de $\mathbb{R}^3$ donc que ces sous-espaces vectoriels sont supplémentaires.

2. Que peut-on en déduire concernant u ?
On déduit du résultat précédent que u est la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(u + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$.

3. Comment peut-on obtenir ce résultat à l'aide d'un calcul matriciel ?
On vérifie que $A^2 = \mathrm{I}_3$.

EXERCICE 2
On considère l'endomorphisme $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associé à

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On note $e_1 = (1,0,1), e_2 = (0,1,1)$ et $e_3 = (1,-1,1)$.

1. Calculer $f(e_1)$.
$f(e_1) = (0,0,0)$.

2. Que peut-on en déduire concernant f ?
On déduit du résultat précédent que f n'est pas injective.

3. Comment peut-on démontrer directement ce résultat ?
On a directement $\det(B) = 0$, car la troisième colonne de B est proportionnelle à la première.
Cela signifie aussi que $\mathrm{rg}(B) \neq 3$...

4. Montrer que la famille (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
$\det(e_1, e_2, e_3) = 1$ donc la famille est libre, de cardinal 3, c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

5. Déterminer la matrice de f dans la base (e_1, e_2, e_3).
On note P la matrice de passage de la base canonique à la base (e_1, e_2, e_3).
La matrice de f dans la base (e_1, e_2, e_3) est donnée par : $M = P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

6. En déduire la valeur de B^n, où $n \in \mathbb{N}^*$.
$B^n = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} (-1)^{n+1} & (-1)^{n+1} & (-1)^n \\ -2^n + (-1)^n & (-1)^n & 2^n + (-1)^{n+1} \\ -2^n + (-1)^{n+1} & (-1)^{n+1} & 2^n + (-1)^n \end{pmatrix}$.

EXERCICE 3
Soir E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f une endomorphisme de E vérifiant

$$f^2 = \frac{1}{2}(f + \mathrm{Id}_E)$$

On définit l'application $p = \frac{2}{3}f + \frac{1}{3}\mathrm{Id}_E$

1. Montrer que p est un projecteur de E.
p est linéaire car f et Id_E le sont. Par linéarité de f et commutativité de f et Id_E, on a :
$p \circ p = \frac{4}{9}f^2 + \frac{4}{9}f + \frac{1}{9}\mathrm{If}_E = \frac{2}{9}(f + \mathrm{Id}_E) + \frac{4}{9}f + \frac{1}{9}\mathrm{Id}_E = \frac{2}{3}f + \frac{1}{3}\mathrm{Id}_E = p$.
On en déduit que p est une projecteur.

2. Montrer que $\mathrm{Im}(p) = \{x \in E / f(x) = x\}$.
Soit $x \in E$

$$\begin{aligned} f(x) = x \quad &\Leftrightarrow \frac{3}{2}p(x) - \frac{1}{2}x = x \\ &\Leftrightarrow \frac{3}{2}p(x) = \frac{3}{2}x \\ &\Leftrightarrow p(x) = x \\ &\Leftrightarrow x \in \mathrm{Im}(p) \end{aligned}$$

3. On note q le projecteur sur $\mathrm{Ker}(p)$ parallèlement à $\mathrm{Im}(p)$.
Exprimer q comme une combinaison linéaire de f et Id_E.
$q = \mathrm{Id}_E - p = \frac{2}{3}(\mathrm{Id}_E - f)$

4. En déduire que

$$E = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}\left(f + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E\right)$$

Remarquons tout d'abord que pour tout $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et $u \in \mathscr{L}(E), \mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(\lambda u)$.
En effet, comme $\lambda \neq 0, u(x) = 0 \Leftrightarrow \lambda u(x) = 0$...

Comme $f - \mathrm{Id}_E = \frac{3}{2}q$ et $f + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E = \frac{3}{2}p$, on a :
$\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Ker}(q) = \mathrm{Im}(p)$ et $\mathrm{Ker}\left(f + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E\right) = \mathrm{Ker}(p)$.
Comme p est un projecteur, $\mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p) = E$ d'où le résultat.