Math. – ES 2 - S2 – Géométrie

jeudi 23 mai 2019 - Durée 2 h

Toutes les réponses seront justifiées. La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction.

Définitions et notations

n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2, fixé et $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.
Pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$ on note $\mathscr{B}_{k,n}$ le polynôme

$$\mathscr{B}_{k,n} = \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k}$$

On admettra que pour tout $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, la famille $(\mathscr{B}_{k,n})_{0 \leq k \leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Pour $p = 2$ ou 3, $\mathbb{R}^p$ est muni de sa structure euclidienne usuelle et d'un repère orthonormé d'origine O.
Si $A_0, A_1, \cdots, A_n$ sont $(n+1)$ points de $\mathbb{R}^p$, on appelle **courbe de Bézier** associée aux points de contrôle $A_0, A_1, \cdots, A_n$ la courbe paramétrée définie sur $[0,1]$ par :

$$\forall t \in [0,1], \overrightarrow{OM(t)} = \sum_{k=0}^{n} \mathscr{B}_{k,n}(t) \overrightarrow{OA_k}$$

Partie I : Une courbe de Bézier

Dans cette partie et la suivante, on se place dans $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
On considère la courbe de Bézier Γ_1 associée aux points de contrôle A_0, A_1, A_2 et A_3 de coordonnées respectives $(0,0), (2,2), (1,3)$ et $(1,-1)$.

1. Montrer que Γ_1 est la restriction à $[0,1]$ de la courbe Γ_0 admettant pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x(t) = 6t - 9t^2 + 4t^3 \\ y(t) = 6t - 3t^2 - 4t^3 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

2. Construire les tableaux de variations de x et y.

3. Déterminer les points réguliers de Γ_0 dont la tangente à Γ_0 est horizontale ou verticale.

4. Déterminer une équation cartésienne de la tangente à Γ_0 au point de paramètre $t = 0$.

5. Déterminer le point singulier de Γ_0. Préciser sa nature ainsi que la tangente à Γ_0 en ce point.

6. Donner la nature des branches infinies de Γ_0.

7. Tracer dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe Γ_1, les points A_0, A_1, A_2 et A_3 ainsi que les tangentes obtenues aux questions précédentes.

T.S.V.P.

Partie II : Un détour par le cas général

Dans cette partie, on se place encore dans le plan, mais n désigne un entier naturel quelconque supérieur à 2. On considère $(n+1)$ points $A_0, A_1, \cdots, A_n$, et on note Γ la courbe de Bézier associée aux points de contrôle $A_0, A_1, \cdots, A_n$.

1. Que peut-on dire des points de Γ de paramètres $t = 0$ et $t = 1$?

2. On suppose dans cette question que les points A_0 et A_1 sont distincts. Montrer que la tangente à Γ en A_0 est la droite (A_0A_1).

3. Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$. On considère la courbe Λ dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x(t) = P(t) \\ y(t) = Q(t) \end{cases}, t \in [0,1]$.
Est-il possible de trouver $(n+1)$ points $A_0, A_1, \cdots, A_n$ tels que Λ soit la courbe de Bézier aux points de contrôle $A_0, A_1, \cdots, A_n$?

Partie III : Une surface de révolution

On se place désormais dans l'espace $\mathbb{R}^3$ muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, et on considère la courbe de Bézier Γ_2 associée aux points de contrôle D_0, D_1, D_2 et D_3 de coordonnées respectives $(-3, 0, 0), (-1, 1, 0), (1, 1, 0)$ et $(3, 0, 0)$.

1. Vérifier qu'un paramétrage de Γ_2 est : $\begin{cases} x(t) = 6t - 3 \\ y(t) = 3(t - t^2) \\ z(t) = 0 \end{cases}, t \in [0,1]$.

2. Donner un vecteur directeur, ainsi qu'un système d'équations cartésiennes de la tangente à Γ_2 au point de paramètre $t = \dfrac{1}{3}$.

3. Déterminer une équation cartésienne de la surface de révolution obtenue en faisant tourner Γ_2 autour de l'axe $(O, \vec{i})$.

Fin de l'énoncé de géométrie