CB n°10 - Espaces vectoriels - Sujet 1

1. Les ensembles suivants sont-ils des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels ? Si oui, en donner une base.

a. $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y = 0\}$

b. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x - y + z = 0 \wedge 2x + y - z = 0\}$

c. $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ (x - y + z)^2 = (2x + y - z)^2\}$

d. $H = \{P \in \mathbb{R}_2[X],\ P(1) = P(0)\}$

2. On considère dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs suivants :

$$u = (1; 0; 2), \quad v = (-1; 1; -1), \quad w = (-1; 3; 1), \quad x = (1; 0; 1), \quad y = (1; 1; 0)$$

On note $E = \text{Vect}\{u, v, w\}, F = \text{Vect}\{x\}$ et $G = \text{Vect}\{x, y\}$.

a. Quelles sont les dimensions de E et G ?

b. E et F sont-ils supplémentaires ? Justifier la réponse.

c. Déterminer une base de $E \cap G$.

d. Déterminer une base de $E + G$.

e. Déterminer un supplémentaire de G dans $\mathbb{R}^3$.

CB n°10 - Espaces vectoriels - Sujet 2

1. Les ensembles suivants sont-ils des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels ? Si oui, en donner une base.

a. $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x - z = 0\}$

b. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ (x - y + z)^2 - (x + 2y - 2z)^2 = 0\}$

c. $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ (x - y + z)^2 + (x + 2y - 2z)^2 = 0\}$

d. $H = \left\{P \in \mathbb{R}_2[X],\ P(1) = P'(1)\right\}$

2. On considère dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs suivants :

$$u = (1; 0; 2), \quad v = (1; 3; 2), \quad w = (1; 1; 2), \quad x = (0; 1; 1), \quad y = (1; 1; 0)$$

On note $E = \text{Vect}\{u, v, w\}, F = \text{Vect}\{x\}$ et $G = \text{Vect}\{x, y\}$.

a. Quelles sont les dimensions de E et G ?

b. E et F sont-ils supplémentaires ? Justifier la réponse.

c. Déterminer une base de $E \cap G$.

d. Déterminer une base de $E + G$.

e. Déterminer un supplémentaire de G dans $\mathbb{R}^3$.