CB n°10 - Espaces vectoriels - Sujet 1

1. Les ensembles suivants sont-ils des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels ? Si oui, en donner une base.

a. $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y = 0\}$ $= \text{Vect}\,\{(1; -1; 0), (0; 0; 1)\}$

b. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x - y + z = 0 \wedge 2x + y - z = 0\}$ $= \text{Vect}\,\{(0; 1; 1)\}$

c. $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ (x - y + z)^2 = (2x + y - z)^2\}$
Ce n'est pas un espace vectoriel : $X = (0; 1; -1) \in G, Y = (2; 0; 1) \in G$ mais $X + Y = (2; 1; 0) \notin G$

d. $H = \{P \in \mathbb{R}_2[X],\ P(1) = P(0)\}$ $= \text{Vect}\{X^2 - X, X^0\}$

2. On considère dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs suivants :

$$u = (1; 0; 2), \quad v = (-1; 1; -1), \quad w = (-1; 3; 1), \quad x = (1; 0; 1), \quad y = (1; 1; 0)$$

On note $E = \text{Vect}\{u, v, w\}, F = \text{Vect}\{x\}$ et $G = \text{Vect}\{x, y\}$.

a. Quelles sont les dimensions de E et G ?
$w = 2u + 3v$ donc $E = \text{Vect}\{u, v\}$. u et v n'étant pas colinéaires, $\dim(E) = 2$.
x et y n'étant pas colinéaires, $\dim(G) = 2$.

b. E et F sont-ils supplémentaires ? Justifier la réponse.
(u, v, x) est une famille libre de cardinal 3 donc $E \oplus F = \mathbb{R}^3$

c. Déterminer une base de $E \cap G$. $E \cap G = \text{Vect}\{u - v\}$

d. Déterminer une base de $E+G$. $\dim(E+G) = \dim(E)+\dim(G)-\dim(E\cap G) = 3$ donc $E+G = \mathbb{R}^3$

e. Déterminer un supplémentaire de G dans $\mathbb{R}^3$. $\text{Vect}\{u\}$ convient.

CB n°10 - Espaces vectoriels - Sujet 2

1. Les ensembles suivants sont-ils des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels ? Si oui, en donner une base.

a. $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x - z = 0\}$ $= \text{Vect}\{(1; 0; 1), (0; 1; 0)\}$

b. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ (x - y + z)^2 - (x + 2y - 2z)^2 = 0\}$
Ce n'est pas un espace vectoriel : $X = (1; 1; 1) \in F, Y = (1; 0; 2) \in F$ mais $X + Y = (2; 1; 3) \notin F$

c. $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ (x - y + z)^2 + (x + 2y - 2z)^2 = 0\}$ $= \text{Vect}\{(0; 1; 1; 0), (0; 0; 0; 1)\}$

d. $H = \{P \in \mathbb{R}_2[X],\ P(1) = P'(1)\}$ $= \text{Vect}\{X, X^2 + 1\}$

2. On considère dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs suivants :

$$u = (1; 0; 2), \quad v = (1; 3; 2), \quad w = (1; 1; 2), \quad x = (0; 1; 1), \quad y = (1; 1; 0)$$

On note $E = \text{Vect}\{u, v, w\}, F = \text{Vect}\{x\}$ et $G = \text{Vect}\{x, y\}$.

a. Quelles sont les dimensions de E et G ?
$v = 3w - 2u$ donc $E = \text{Vect}\{u, v\}$, u et v n'étant pas colinéaires, $\dim(E) = 2$.
x et y n'étant pas colinéaires, $\dim(G) = 2$.

b. E et F sont-ils supplémentaires ? Justifier la réponse.
(u, v, x) est une famille libre de cardinal 3 donc $E \oplus F = \mathbb{R}^3$

c. Déterminer une base de $E \cap G$. $E \cap G = \text{Vect}\{v\}$

d. Déterminer une base de $E+G$. $\dim(E+G) = \dim(E)+\dim(G)-\dim(E\cap G) = 3$ donc $E+G = \mathbb{R}^3$

e. Déterminer un supplémentaire de G dans $\mathbb{R}^3$. $\text{Vect}\{u\}$ convient.