CB n°11 - Applications linéaires - Sujet 1

1. Les applications suivantes sont-elles des applications linéaires ? (Justifier la réponse).
Lorsqu'elles le sont, en donner la matrice dans les bases canoniques, puis en déterminer le noyau et l'image.

a. $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (x-y, 2x+y, xy) \end{array} \right.$

f n'est pas une application linéaire car $f\left(2(1;1)\right) \neq 2f((1;1))$

b. $g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, x+2y, x+3y) \end{array} \right.$

$\forall\,(\lambda, (x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in \mathbb{R}\times\left(\mathbb{R}^2\right)^2, g\left(\lambda(x_1, y_1) + (x_2, y_2)\right) = \lambda g((x_1, y_1)) + g((x_2, y_2)) \Rightarrow g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$

$\text{mat}_{\mathscr{C}_2}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{Ker}(g) = \{(0;0)\}, \quad \text{Im}(g) = \text{Vect}\{(1;1;1), (-1;2;3)\}$

c. $h : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & P(0) + P(1)X + P(2)X^2 \end{array} \right.$

$\forall\,(\lambda, P, Q,) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R}_2[X])^2, h\left(\lambda P + Q\right) = \lambda h(P) + h(Q) \Rightarrow h \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_2[X])$

$\text{mat}_{\mathscr{C}}(h) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \text{Ker}(h) = \{0\}, \quad \text{Im}(h) = \mathbb{R}_2[X]$

2. Soit $E = \mathbb{R}^3$. On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ sa base canonique.
On considère la famille $\mathscr{B}' = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ telle que

$$\varepsilon_1 = e_1 + e_2, \quad \varepsilon_2 = 3e_1 + e_2 - e_3, \quad \varepsilon_3 = e_1 + e_2 + e_3$$

et $f \in \mathscr{L}(E)$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a. Déterminer Ker(f)= $\text{Vect}\{(1;1;1)\}$ et Im(f)= $\text{Vect}\{(1;1;0), (2;0;-1)\}$

b. Montrer que $\mathscr{B}'$ est une base de E.

$P = \text{mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible donc $\mathscr{B}'$ est une base. De plus, $P^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

c. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathscr{B}'$. $\text{mat}_{\mathscr{B}'}(f) = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3. Déterminer la nature de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice M suivante, ainsi que ses éléments caractéristiques :

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$M^2 = \text{I}_3$ donc M est la matrice de la symétrie s par rapport à $\text{Ker}(s - \text{Id}) = \text{Vect}\{(1;1;0), (1;0;1)\}$ parallèlement à $\text{Ker}(s + \text{Id}) = \text{Vect}\{(1;1;1)\}$.

CB n°11 - Applications linéaires - Sujet 2

1. Les applications suivantes sont-elles des applications linéaires ? (Justifier la réponse).
Lorsqu'elles le sont, en donner la matrice dans les bases canoniques, puis en déterminer le noyau et l'image.

a. $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x-2y+z, x+3y+z, x-y+1) \end{array} \right.$

f n'est pas une application linéaire car $f((0;0;0)) \neq (0;0;0)$

b. $g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+y+z, x-y) \end{array} \right.$

$\forall\, (\lambda, (x_1,y_1,z_1), (x_2,y_2,z_2)) \in \mathbb{R}\times\left(\mathbb{R}^3\right)^2, g\left(\lambda(x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2)\right) = \lambda g((x_1,y_1,z_1))+g((x_2,y_2,z_2)) \Rightarrow g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^2)$

$\mathrm{mat}_{\mathscr{C}_3}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Vect}\{(1;1;-2)\}, \quad \mathrm{Im}(g) = \mathbb{R}^2$

c. $h : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & P+P'+P'' \end{array} \right.$

$\forall\, (\lambda, P, Q) \in \mathbb{R}\times(\mathbb{R}_2[X])^2, h\left(\lambda P+Q\right) = \lambda h(P)+h(Q) \Rightarrow h \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_2[X])$

$\mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(h) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{Ker}(h) = \{0\}, \quad \mathrm{Im}(h) = \mathbb{R}_2[X]$

2. Soit $E = \mathbb{R}^3$. On note $\mathscr{B} = (e_1,e_2,e_3)$ sa base canonique.
On considère la famille $\mathscr{B}' = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ telle que

$$\varepsilon_1 = e_1+e_2, \quad \varepsilon_2 = -e_1+e_3, \quad \varepsilon_3 = e_1+e_2+e_3$$

et $f \in \mathscr{L}(E)$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 5 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a. Déterminer Ker(f)= Vect$\{(1;1;1)\}$ et Im(f)= Vect$\{(2;3;1),(1;1;0)\}$.

b. Montrer que $\mathscr{B}'$ est une base de E.

$P = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible donc $\mathscr{B}'$ est une base. De plus, $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

c. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathscr{B}'$. $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}'}(f) = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3. Déterminer la nature de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice M suivante, ainsi que ses éléments caractéristiques :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -3 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$M^2 = \mathrm{I}_3$ donc M est la matrice de la symétrie s par rapport à $\mathrm{Ker}(s-\mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}\{(1;-1;1)\}$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(s+\mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}\{(1;0;-1),(0;1;-1)\}$.