CB n°12 - Séries numériques - Sujet 1

1. Déterminer la nature des séries de terme général u_n dans les cas suivants :

a. $u_n = n^2 \mathrm{e}^{-n}$

b. $u_n = \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$

c. $u_n = 1 - \cos\left(\dfrac{1}{n}\right)$

d. $u_n = \sqrt[n]{1 - \dfrac{1}{n}}$

2. Etablir la convergence et déterminer la somme des séries suivantes :

a. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{\mathrm{ch} n}{4^n}$

b. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{-n+2}{n!}$

c. $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$

3a. Soit (u_n) une suite numérique. Montrer que si la série de terme général u_{2n} et la série de terme général u_{2n+1} convergent, alors la série de terme général u_n converge et que dans ce cas : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{2n} + \sum_{n=0}^{+\infty} u_{2n+1}$.

b. On note $u_n = \dfrac{1}{n^2}$. Justifier que $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_{2n}$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_{2n+1}$ convergent.

c. Sachant que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \frac{\pi^2}{6}$, calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

CB n°12 - Séries numériques - Sujet 2

1. Déterminer la nature des séries de terme général u_n dans les cas suivants :

a. $u_n = \frac{1}{n} \mathrm{e}^{\frac{1}{n^2}}$

b. $u_n = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}\right)$

c. $u_n = \frac{1}{n} - \sin\left(\frac{1}{n}\right)$

d. $u_n = \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}}$

2. Etablir la convergence et déterminer la somme des séries suivantes :

a. $\sum\limits_{n \geq 0} \frac{\mathrm{sh} n}{3^n}$

b. $\sum\limits_{n \geq 0} \frac{2n-1}{n!}$

c. $\sum\limits_{n \geq 2} (-1)^n \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)$

3a. Soit (u_n) une suite numérique telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note : $v_n = u_{2n} + u_{2n+1}$. Montrer que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature, et qu'en cas de convergence : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n$.

b. Établir la convergence et la somme de la série $\sum\limits_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{n\,(n + (-1)^n)}$.