CB n°12 - Séries numériques - Sujet 1

1. Déterminer la nature des séries de terme général u_n dans les cas suivants :

a. $u_n = n^2 e^{-n}$ $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 u_n = 0 \Rightarrow u_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$; par comparaison, $\sum u_n$ converge.

b. $u_n = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ $\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$; par comparaison, $\sum u_n$ diverge.

c. $u_n = 1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)$ $\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$; par comparaison, $\sum u_n$ converge.

d. $u_n = \sqrt[n]{1-\frac{1}{n}}$ $\underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-\frac{1}{n^2}} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \neq 0$; $\sum u_n$ est grossièrement divergente.

2. Etablir la convergence et déterminer la somme des séries suivantes :

a. $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{\mathrm{ch} n}{4^n}$ Pour $p \geq 0$, $\sum\limits_{n=0}^{p} \frac{\mathrm{ch} n}{4^n} = \sum\limits_{n=0}^{p} \frac{1}{2}\left(\left(\frac{e}{4}\right)^n + \left(\frac{e^{-1}}{4}\right)^n\right) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{2}{4-e} + \frac{2}{4-e^{-1}}$

b. $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{-n+2}{n!}$ Pour $p \geq 1$, $\sum\limits_{n=0}^{p} \frac{2-n}{n!} = \sum\limits_{n=0}^{p} \frac{2}{n!} - \sum\limits_{n=1}^{p} \frac{1}{(n-1)!} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 2e - e = e$

c. $\sum\limits_{n\geq 2} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ Pour $p \geq 2$, $S_p = \sum\limits_{n=2}^{p} \ln\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right) = \sum\limits_{n=2}^{p} \ln\left(\frac{n+1}{n} \times \frac{n-1}{n}\right)$

$$S_p = \sum_{n=2}^{p}\left(\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - \ln\left(\frac{n}{n-1}\right)\right) \underbrace{=}_{\text{télescopage}} \ln\left(\frac{p+1}{p}\right) - \ln(2) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} -\ln(2)$$

3a. Soit (u_n) une suite numérique. Montrer que si la série de terme général u_{2n} et la série de terme général u_{2n+1} convergent, alors la série de terme général u_n converge et que dans ce cas : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_{2n} + \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_{2n+1}$.

Pour $n \geq 0$, on note $P_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_{2k}$, $\quad Q_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_{2k+1}$, $\quad S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$.

On a : $S_0 = P_0$, pour $n \in \mathbb{N}^*, S_{2n} = P_n + Q_{n-1}$ et pour $n \in \mathbb{N}, S_{2n+1} = P_n + Q_n$.

Ainsi, si $\sum u_{2n}$ et $\sum u_{2n+1}$ convergent, alors les suites (P_n) et (Q_n) convergent respectivement vers $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_{2k}$ et $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_{2k+1}$ et, par somme, (S_{2n}) et (S_{2n+1}) convergent vers la même limite qui est la somme des deux précédentes, donc (S_n) converge et on a $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_{2n} + \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_{2n+1}$

b. On note $u_n = \frac{1}{n^2}$. Justifier que $\sum\limits_{n\geq 1} u_{2n}$ et $\sum\limits_{n\geq 0} u_{2n+1}$ convergent.

$u_{2n} = \frac{1}{4n^2}$, $u_{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4n^2}$ donc, par comparaison, les deux séries convergent.

c. Sachant que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n = \frac{\pi^2}{6}$, calculer $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

D'après le **a.**, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2} + \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ donc $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{4} \times \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{8}$

CB N°12 - Séries numériques - Sujet 2

1. Déterminer la nature des séries de terme général u_n dans les cas suivants :

a. $u_n = \dfrac{1}{n}e^{\frac{1}{n^2}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$ donc par comparaison $\sum u_n$ diverge.

b. $u_n = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{n}\right) = \sin\dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$ donc par comparaison $\sum u_n$ diverge.

c. $u_n = \dfrac{1}{n} - \sin\left(\dfrac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{6n^3}$ donc par comparaison $\sum u_n$ converge.

d. $u_n = \sqrt[n]{\dfrac{1}{n^2}} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-2\frac{\ln n}{n}} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \neq 0$; $\sum u_n$ est grossièrement divergente.

2. Etablir la convergence et déterminer la somme des séries suivantes :

a. $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{\text{sh}n}{3^n}$ Pour $p \geq 0$, $\sum\limits_{n=0}^{p} \dfrac{\text{sh}n}{3^n} = \sum\limits_{n=0}^{p} \dfrac{1}{2}\left(\left(\dfrac{e}{3}\right)^n - \left(\dfrac{e^{-1}}{3}\right)^n\right) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{1}{3-e} - \dfrac{1}{3-e^{-1}}\right)$

b. $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{2n-1}{n!}$ Pour $p \geq 1$, $\sum\limits_{n=0}^{p} \dfrac{2n-1}{n!} = \sum\limits_{n=1}^{p} \dfrac{2}{(n-1)!} - \sum\limits_{n=0}^{p} \dfrac{1}{n!} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 2e - e = e$

c. $\sum\limits_{n\geq 2} (-1)^n \ln\left(\dfrac{n+1}{n-1}\right)$ Pour $p \geq 2$, $S_p = \sum\limits_{n=2}^{p} (-1)^n \ln\left(\dfrac{n+1}{n-1}\right) = \sum\limits_{n=2}^{p} (-1)^n \ln\left(\dfrac{n+1}{n} \times \dfrac{n}{n-1}\right)$

$S_p = \sum\limits_{n=2}^{p}\left((-1)^n \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right) - (-1)^{n-1}\ln\left(\dfrac{n}{n-1}\right)\right) \underbrace{=}_{\text{télescopage}} (-1)^p \ln\left(\dfrac{p+1}{p}\right) + \ln(2) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(2)$

3a. Soit (u_n) une suite numérique telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note : $v_n = u_{2n} + u_{2n+1}$. Montrer que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature, et qu'en cas de convergence : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note : $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ et $P_n = \sum\limits_{k=0}^{n} v_k$. On a, pour $n \in \mathbb{N}$, $S_{2n+1} = P_n$ et $S_{2n} = P_n - u_{2n+1}$.

Si $\sum u_n$ converge, alors la suite (S_{2n+1}) converge vers $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k$ et (P_n) a la même limite donc $\sum v_n$ converge et on a l'égalité des sommes.

Réciproquement, si $\sum v_n$ converge, alors la suite (P_n) converge donc la suite (S_{2n+1}) converge vers $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} v_k$ et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ la suite (S_{2n}) converge elle aussi et a la même limite que (P_n).

On en déduit que (S_n) converge vers cette valeur, c'est-à-dire que $\sum u_n$ converge et a pour somme $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} v_k$.

b. Établir la convergence et la somme de la série $\sum\limits_{n\geq 2} \dfrac{(-1)^n}{n\,(n+(-1)^n)}$.

Pour $n \geq 2$, on note $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n\,(n+(-1)^n)}$. On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et pour $n \geq 1$, $v_n = u_{2n} + u_{2n+1} = 0$.

$\sum v_n$ converge donc d'après la question précédente, $\sum u_n$ converge et a pour somme $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n = 0$