CB N°1 - Raisonnement - Vocabulaire ensembliste - Sujet 1

1. Questions de cours.

Compléter avec l'un des symboles $\subset, \supset$ ou $=$, puis démontrer le résultat :

$$f(f^{-1}(A)) \quad \subset \quad A \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad f^{-1}(f(A)) \quad \supset \quad A$$

Voir démo dans le cours

2. Soit $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Donner la signification puis la négation de l'assertion suivante :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad ((f(x) = f(y)) \Rightarrow (x = y))$$

Cette assertion traduit l'injectivité de f.
Sa négation : $\exists (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (f(x) = f(y)) \wedge (x \neq y)$

3. Soient $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, (a, b) \in \mathbb{R}^2, (r, \varepsilon) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$.
Donner la contraposée puis la négation de l'assertion suivante :

$$|a - b| \leq r \Rightarrow |f(a) - f(b)| \leq \varepsilon$$

Contraposée : $|f(a) - f(b)| > \varepsilon \quad \Rightarrow \quad |a - b| > r$
Négation : $|a - b| \leq r \quad \wedge \quad |f(a) - f(b)| > \varepsilon$

4. (u_n) désigne une suite réelle ; traduire à l'aide de quantificateurs les expressions suivantes :

a. (u_n) est une suite bornée ; $\exists M \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M$

b. (u_n) n'est pas croissante ; $\exists n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} < u_n$

5. A, B et C désignent des ensembles. Montrer que

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$

$$A \setminus (B \cap C) = A \cap \left(\overline{B \cap C}\right) = A \cap \left(\overline{B} \cup \overline{C}\right) = \left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(A \cap \overline{C}\right) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$

6. Étudier l'injectivité et la surjectivité des applications suivantes (justifier la réponse, éventuellement à l'aide d'une figure) :

a. $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 + 2x \end{array} \right.$

$f(0) = f(-2) = 0$ donc f n'est pas injective.
L'équation $x^2 + 2x + 2 = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$ donc -2 n'a pas d'antécédent par f qui n'est donc pas surjective.

b. $g : \left| \begin{array}{ccc} [0, 2\pi] & \to & [-1, 1] \\ x & \mapsto & \cos\left(\dfrac{x}{2}\right) \end{array} \right.$

Lorsque $x \in [0, 2\pi]$, $\dfrac{x}{2} \in [0, \pi]$, donc comme la fonction cos est bijective de $[0, \pi]$ dans $[-1, 1]$, g est bijective de $[0, 2\pi]$ dans $[-1, 1]$.

c. $h : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & xy \end{array} \right.$

$h(1, 0) = h(0, 0)$ donc h n'est pas injective.
Pour tout $t \in \mathbb{R}, \quad h(1, t) = t$ donc h est surjective.

CB N°1 - Raisonnement - Vocabulaire ensembliste - Sujet 2

1. Questions de cours

Compléter avec l'un des symboles $\subset, \supset$ ou $=$, puis démontrer le résultat :

$$f(A \cap B) \quad \subset \quad f(A) \cap f(B) \qquad \text{et} \qquad f(A \cup B) \quad = \quad f(A) \cup f(B)$$

Voir démo dans le cours.

2. Soit $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Donner la signification puis la négation de l'assertion suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, f(y) = x$$

Cette assertion traduit la surjectivité de f.
Sa négation : $\exists x \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad f(y) \neq x$

3. Soient (u_n) une suite réelle, $n_0 \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.
Donner la contraposée puis la négation de l'assertion suivante :

$$n \geq n_0 \Rightarrow |u_n| < \varepsilon$$

Contraposée : $|u_n| \geq \varepsilon \quad \Rightarrow \quad n < n_0$
Négation : $n \geq n_0 \quad \wedge \quad |u_n| \geq \varepsilon$

4. (u_n) désigne une suite réelle ; traduire à l'aide de quantificateurs les expressions suivantes :

a. (u_n) n'est pas constante ; $\exists n \in \mathbb{N}, \quad u_n \neq u_0$

b. (u_n) n'est pas décroissante ; $\exists n \in \mathbb{N}, \quad u_n < u_{n+1}$

5. A, B et C désignent des ensembles. Montrer que

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$$

$$A \setminus (B \cup C) = A \cap \left(\overline{B \cup C}\right) = A \cap \left(\overline{B} \cap \overline{C}\right) = \left(A \cap \overline{B}\right) \cap \left(A \cap \overline{C}\right) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$$

6. Étudier l'injectivité et la surjectivité des applications suivantes (justifier la réponse, éventuellement à l'aide d'une figure) :

a. $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 - x \end{array} \right.$
$f(1) = f(0)$ donc f n'est pas injective.
L'équation $x^2 - x + 1 = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$ donc -1 n'a pas d'antécédent par f qui n'est donc pas surjective.

b. $g : \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & [-1,1] \\ x & \mapsto & \sin(2\pi x) \end{array} \right.$
$\sin(0) = \sin(1)$ donc g n'est pas injective.
Lorsque $x \in [0,1]$, $2\pi x \in [0, 2\pi]$ et sin est surjectif de $[0, 2\pi]$ dans $[-1, 1]$; il en est de même de g.

c. $h : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x^2 + y^2 \end{array} \right.$
$h(0,1) = h(1,0)$ donc h n'est pas injective.
-1 n'a pas d'antécédent par h qui n'est donc pas surjective.