CB n°2 - Calcul algébrique - Trigonométrie - Sujet 1

1. Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ x-2y+2z=-2 \\ 2x-y-2z=-1 \end{cases} \qquad S=\{(0,1,0)\}$$

2. Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

a. Exprimer simplement

$$\sum_{k=1}^{n}\left((k+1)^3-k^3\right)$$

Par télescopage, on a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left((k+1)^3-k^3\right)=(n+1)^3-1$

b. Développer $(k+1)^3$ et en déduire que

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

La formule du binôme de Newton donne : $(k+1)^3=k^3+3k^2+3k+1$; on a donc : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left((k+1)^3-k^3\right)=\sum_{k=1}^{n}(3k^2+3k+1)$. On en déduit que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{3}\left((n+1)^3-1-3\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}1\right)$ et donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{3}\left(n^3+3n^2+3n-3\frac{n(n+1)}{2}-n\right)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

c. Calculer

$$\sum_{1\le i\le j\le n} i$$

$$\sum_{1\le i\le j\le n} i=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}i=\sum_{j=1}^{n}\frac{j(j+1)}{2}=\frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{n}j^2+\sum_{j=1}^{n}j\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}\right)=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$:

a. $\cos(2x)+\sin(x)=1 \quad \Leftrightarrow 1-2\sin^2(x)+\sin(x)=1 \Leftrightarrow \sin(x)\left(1-2\sin(x)\right)=0$
$\displaystyle\Leftrightarrow \left(\sin(x)=0\vee\sin(x)=\frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow x\in\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left\{k\pi,\frac{\pi}{6}+2k\pi,\frac{5\pi}{6}+2k\pi\right\}$

b. $\displaystyle\cos(x)-\sin(x)=\sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1\Leftrightarrow x\equiv-\frac{\pi}{4}[2\pi]\Leftrightarrow x\in\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left\{-\frac{\pi}{4}+2k\pi\right\}$

c. $\displaystyle|\cos(x)|\le\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\le\cos(x)\le\frac{1}{2}\Leftrightarrow x\in\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left(\left[\frac{\pi}{3}+2k\pi,\frac{2\pi}{3}+2k\pi\right]\cup\left[\frac{4\pi}{3}+2k\pi\frac{5\pi}{3}+2k\pi\right]\right)$
$\displaystyle\Leftrightarrow x\in\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left[\frac{\pi}{3}+k\pi,\frac{2\pi}{3}+k\pi\right]$. Ce résultat s'obtient en observant le cercle trigonométrique.

4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a. $\sqrt{x^2+x-2} \leq x+1$

Domaine de validité : $D_v =]-\infty, -2] \cup [1, +\infty[$

$\rightsquigarrow$ Si $x \leq -2$: l'inégalité n'est pas vérifiée car si $x \leq -2$ alors $x+1<0$ et un nombre positif n'est jamais inférieur à un nombre strictement négatif.

$\rightsquigarrow$ Si $x \geq 1$: les deux membres de l'inégalité étant positifs, on peut appliquer la fonction "carré" qui est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et l'inéquation équivaut à $-3 \leq x$ ce qui est toujours vérifié sur $[1, +\infty[$.

Finalement, $S = [1, +\infty[$

b. $|x^2-x-1| \leq 1 \quad \Leftrightarrow -1 \leq x^2-x-1 \leq 1 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x^2-x \geq 0 \\ \text{et} \\ x^2-x-2 \leq 0 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x \in]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[\\ \text{et} \\ x \in [-1, 2] \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow x \in [-1, 0] \cup [1, 2]$

c. $\dfrac{x+1}{m+2} \leq x$ où m désigne un paramètre réel différent de -2.

$\dfrac{x+1}{m+2} \leq x \Leftrightarrow \dfrac{(m+1)x-1}{m+2} \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{m+1}{m+2}x - \dfrac{1}{m+2} \geq 0$

$\rightsquigarrow$ Si $m=-1$ $\quad S = \varnothing$

$\rightsquigarrow$ Si $m \in]-\infty, -2[\cup]-1, +\infty[$ alors $\dfrac{m+1}{m+2} > 0$ et $S = \left[\dfrac{1}{m+1}, +\infty\right[$

$\rightsquigarrow$ Si $m \in]-2, -1[$ alors $\dfrac{m+1}{m+2} < 0$ et $S = \left]-\infty, \dfrac{1}{m+1}\right]$

CB n°2 - Calcul algébrique -Trigonométrie - Sujet 2

1. Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ x + 2y - z = 1 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases} \qquad S = \left\{ \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4} \right) \right\}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a. Exprimer simplement

$$\sum_{k=1}^{n} \left(k^3 - (k-1)^3\right)$$

Par télescopage, on a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(k^3 - (k-1)^3\right) = n^3$

b. Développer $(k-1)^3$ et en déduire que

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

La formule du binôme de Newton donne : $(k-1)^3 = k^3 - 3k^2 + 3k - 1$; on a donc : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(k^3 - (k-1)^3\right) = \sum_{k=1}^{n} (3k^2 - 3k + 1)$. On en déduit que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{3} \left(n^3 + 3 \sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 1 \right)$ et donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{3} \left(n^3 + 3\frac{n(n+1)}{2} - n \right) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

c. Calculer

$$\sum_{0 \le i \le j \le n} j$$

$$\sum_{0 \le i \le j \le n} j = \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{j} j = \sum_{j=0}^{n} j(j+1) = \sum_{j=0}^{n} j^2 + \sum_{j=0}^{n} j = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$:

a. $\cos(x) + \sin(2x) = 0 \quad \Leftrightarrow \cos(x) + 2\cos(x)\sin(x) = 0 \Leftrightarrow \cos(x)\left(1 + 2\sin(x)\right) = 0$ $\displaystyle\Leftrightarrow \left(\cos(x) = 0 \vee \sin(x) = -\frac{1}{2} \right) \Leftrightarrow x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right\}$

b. $\cos(x) + \sin(x) = \sqrt{2} \quad \displaystyle\Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow x \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi] \Leftrightarrow x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{\pi}{4} + 2k\pi \right\}$

c. $\displaystyle|\sin(x)| \le \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \le \sin(x) \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\left[-\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi \right] \cup \left[\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \right] \right)$ $\displaystyle\Leftrightarrow x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi \right]$. Ce résultat s'obtient en observant le cercle trigonométrique.

4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a. $1-2x<\sqrt{x^2-x-2}$

Domaine de validité : $D_v =]-\infty,-1]\cup[2,+\infty[$

$\rightsquigarrow$ Si $x\geq 2$: l'inégalité est vérifiée car si $x\geq 2$ alors $1-2x<0$ et un nombre strictement négatif est toujours strictement inférieur à un nombre positif.

$\rightsquigarrow$ Si $x\leq -1$: les deux membres de l'inégalité étant positifs, on peut appliquer la fonction "carré" qui est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et l'inéquation équivaut à $3x^2-3x+3<0$ ce qui n'est jamais vérifié car le discriminant est strictement négatif.

Finalement, $S=[2,+\infty[$

b. $|2x^2+x-2|\leq 1 \quad \Leftrightarrow -1\leq 2x^2+x-2\leq 1 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} 2x^2+x-1\geq 0 \\ \text{et} \\ 2x^2+x-3\leq 0 \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x\in]-\infty,-1]\cup\left[\frac{1}{2},+\infty\right[\\ \text{et} \\ x\in\left[-\frac{3}{2},1\right] \end{array}\right. \Leftrightarrow x\in\left[-\frac{3}{2},-1\right]\cup\left[\frac{1}{2},1\right]$$

c. $\dfrac{x-1}{m-2}\leq x \quad$ où m désigne un paramètre réel différent de 2

$$\frac{x-1}{m-2}\leq x \Leftrightarrow \frac{(m-3)x+1}{m-2}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{m-3}{m-2}x+\frac{1}{m-2}\geq 0$$

$\rightsquigarrow$ Si $m=3 \qquad S=\mathbb{R}$

$\rightsquigarrow$ Si $m\in]-\infty,2[\cup]3,+\infty[$ alors $\dfrac{m-3}{m-2}>0$ et $S=\left[\dfrac{1}{3-m},+\infty\right[$

$\rightsquigarrow$ Si $m\in]2,3[$ alors $\dfrac{m-3}{m-2}<0$ et $S=\left]-\infty,\dfrac{1}{3-m}\right]$