CB n°3 - Nombres complexes - Sujet 1

1. Question de cours
Pour $\theta \in]0, 2\pi[$, donner la forme trigonométrique des nombres complexes

$$Z_1 = -\left(\overline{e^{i\theta}}\right) \quad = e^{-i\theta+\pi} \qquad \text{et} \qquad Z_2 = e^{i\theta} - 1 \quad = 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta+\pi}{2}} \text{ car } \theta \in]0, 2\pi[\text{ donc } \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) > 0$$

2a. Donner la forme trigonométrique des nombres complexes
$z_1 = \sqrt{2} + \sqrt{6}i \quad = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$
et $z_2 = 2 + 2i \quad = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

b. Donner la forme trigonométrique et la forme algébrique du nombre complexes $\dfrac{z_1}{z_2}$.
D'après la question précédente, $\dfrac{z_1}{z_2} = e^{i\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)} = e^{i\frac{\pi}{12}}$;
de plus $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{(\sqrt{2}+\sqrt{6}i)(2-2i)}{8} = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} + \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}i$

c. En déduire la valeur exacte de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.
Le module de $\dfrac{z_1}{z_2}$ valant 1, le cosinus de son argument est sa partie réelle, d'où :
$\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

3. Donner les racines quatrièmes du nombre complexe $z = 2\sqrt{3} + 2i$.
$z = 4e^{i\frac{\pi}{6}}$ donc ses racines quatrièmes sont :
$\left\{\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{24}+\frac{2k\pi}{4}\right)}, k \in [\![0, 3]\!]\right\} = \left\{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{24}}, \sqrt{2}e^{i\frac{13\pi}{24}}, \sqrt{2}e^{i\frac{25\pi}{24}}, \sqrt{2}e^{i\frac{37\pi}{24}}\right\}$

4. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante, après avoir montré qu'elle admet une solution réelle :

$$2z^3 + 3z^2 + (-1+6i)z - 1 + 3i = 0 \quad (E)$$

$x \in \mathbb{R}$ est solution de (E) si et seulement si $\begin{cases} 2x^3 + 3x^2 - x - 1 = 0 \\ 6x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{2}$

On en déduit que (E) équivaut à $\left(z + \dfrac{1}{2}\right)(2z^2 + 2z - 2 + 6i)$

$\Delta = 20 - 48i = 4(5 - 12i) = (\pm 2(3 - 2i))^2$ donc les solutions de $2z^2 + 2z - 2 + 6i = 0$ sont $1 - i$ et $-2 + i$ et les solutions de (E) sont : $S = \left\{-\dfrac{1}{2}, 1 - i, -2 + i\right\}$

5. Linéariser $\cos^2 x \sin^3 x \quad = -\dfrac{1}{16}(\sin(5x) - \sin(3x) - 2\sin(x))$.

6. Développer $\cos(2x)\sin(4x) \quad = 4\cos^5 x \sin x - 8\cos^3 x \sin^3 x + 4\cos x \sin^5 x$.

CB n°3 - Nombres complexes - Sujet 2

1. Question de cours

Pour $\theta \in]-\pi, \pi[$, donner la forme trigonométrique des nombres complexes

$$Z_1 = \overline{-e^{i\theta}} \quad = e^{-i(\theta+\pi)} \qquad \text{et} \qquad Z_2 = e^{i\theta} + 1 \quad = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}} \text{ car } \theta \in]-\pi, \pi[\text{ donc } \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) > 0$$

2a. Donner la forme trigonométrique des nombres complexes
$z_1 = \sqrt{2} + \sqrt{2}i \quad = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$
et $z_2 = \sqrt{3} + i \quad = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$.

b. Donner la forme trigonométrique et la forme algébrique du nombre complexes $\frac{z_1}{z_2}$.

D'après la question précédente, $\frac{z_1}{z_2} = e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)} = e^{i\frac{\pi}{12}}$;

de plus $\frac{z_1}{z_2} = \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{2}i)(\sqrt{3}-i)}{4} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}i$

c. En déduire la valeur exacte de $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

Le module de $\frac{z_1}{z_2}$ valant 1, le sinus de son argument est sa partie imaginaire, d'où :

$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

3. Donner les racines quatrièmes de $z = 2\sqrt{2}(1-i)$.

$z = 4e^{-i\frac{\pi}{4}}$ donc ses racines quatrièmes sont :

$\left\{\sqrt{2}e^{-i\left(\frac{\pi}{16}+\frac{2k\pi}{4}\right)}, k \in [\![0,3]\!]\right\} = \left\{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{16}}, \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{16}}, \sqrt{2}e^{i\frac{15\pi}{16}}, \sqrt{2}e^{i\frac{23\pi}{16}}\right\}$

4. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante, après avoir montré qu'elle admet une solution réelle :

$$2z^3 + (-1+2i)z^2 + (2+5i)z - 1 - 3i = 0$$

$x \in \mathbb{R}$ est solution de (E) si et seulement si :

$$\begin{cases} 2x^3 - x^2 + 2x - 1 = 0 \\ 2x^2 + 5x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3 - x^2 + 2x - 1 = 0 \\ x = \frac{1}{2} \vee x = -3 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

On en déduit que (E) équivaut à $\left(z - \frac{1}{2}\right)(2z^2 + 2iz + 2 + 6i)$

$\Delta = -20 - 48i = 4(-5-12i) = (\pm 2(2-3i))^2$ donc les solutions de $2z^2 + 2iz + 2 + 6i = 0$ sont $1-2i$ et $-1+i$ et les solutions de (E) sont : $S = \left\{\frac{1}{2}, 1-2i, -1+i\right\}$

5. Linéariser $\cos^3 x \sin^2 x \quad = -\frac{1}{16}(\cos(5x) + \cos(3x) - 2\cos(x))$.

6. Développer $\cos(4x)\sin(2x) \quad = 2\sin x \cos^5 x - 12\sin^3 x \cos^3 x + 2\sin^5 x \cos x$.