CB n°4 - Fonctions circulaires réciproques - Sujet 1

1. Question de cours : Montrer que $\cos(\text{Arcsin}(x)) = \sqrt{1-x^2}$

2. Calculer :

a. $\text{Arccos}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\pi}{6}$

b. $\text{Arcsin}\left(\sin\left(\frac{7\pi}{5}\right)\right) = \text{Arcsin}\left(\sin\left(\pi - \frac{7\pi}{5}\right)\right) = -\frac{2\pi}{5}$

c. $\text{Arcsin}\left(\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\right) = \text{Arcsin}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right)\right) = \frac{3\pi}{8}$

3. x désigne un réel de $]1, 1[$.

a. Simplifier $\tan(\text{Arcsin}(x)) = \frac{\sin(\text{Arcsin}(x))}{\cos(\text{Arcsin}(x))} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

b. Résoudre l'équation

$$\text{Arcsin}(x) = \text{Arctan}(2x)$$

Le domaine de validité est $[-1, 1]$.
Pour $x \in [-1, 1]$, si x est solution alors, puisque $\text{Arctan}(2x) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, on peut appliquer la fonction tan aux deux membres de l'égalité et on obtient : $\tan(\text{Arcsin}(x)) = 2x$.

$\tan(\text{Arcsin}(x)) = 2x \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = 2x \Leftrightarrow\Leftrightarrow x = 0 \vee \sqrt{1-x^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

Réciproquement : $x = 0, x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ sont dans le domaine de validité et vérifient l'égalité.
Ainsi l'ensemble des solutions est

$$S = \left\{0, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$$

4. Soit f la fonction définie par $f(x) = \text{Arccos}\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)$.

a. Donner le domaine de définition et le domaine de dérivabilité de f, puis la dériver.

$\left|\frac{2x}{1+x^2}\right| \leq 1 \Leftrightarrow 2|x| \leq 1 + x^2 \Leftrightarrow 0 \leq (|x|-1)^2$

Cette inégalité est toujours vérifiée, avec égalité si et seulement $x = \pm 1$.

Ainsi, f est définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ et pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ on a :

$$f'(x) = \frac{-\frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2}}{\sqrt{1-\frac{4x^2}{(1+x^2)^2}}} = \frac{2(x^2-1)\sqrt{(1+x^2)^2}}{(1+x^2)^2\sqrt{(1-x^2)^2}} = \frac{2(x^2-1)}{(1+x^2)|x^2-1|} = \begin{cases} \frac{2}{1+x^2} & \text{si } x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[\\ \frac{-2}{1+x^2} & \text{si } x \in]-1, 1[\end{cases}$$

b. En déduire une expression simplifiée de $f(x)$ pour x dans le domaine de définition de f.
D'après la question précédente, il existe C_1, C_2, C_3 dans $\mathbb{R}$ tels que :

$$f(x) = \begin{cases} 2\text{Arctan}(x) + C_1 & \text{si } x < -1 \\ -2\text{Arctan}(x) + C_2 & \text{si } x \in]-1, 1[\\ 2\text{Arctan}(x) + C_3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$f(0)=\dfrac{\pi}{2}$ donc $C_2=\dfrac{\pi}{2}$; de plus, f est continue $\mathbb{R}$ donc $f(-1)=\pi$ donne $C_1=\dfrac{3\pi}{2}$, et $f(1)=0$ donne $C_3=-\dfrac{\pi}{2}$ d'où : $f(x)=\begin{cases} 2\text{Arctan}(x)+\dfrac{3\pi}{2} & \text{si } x\leq -1\\ -2\text{Arctan}(x)+\dfrac{\pi}{2} & \text{si } x\in[-1,1]\\ 2\text{Arctan}(x)-\dfrac{\pi}{2} & \text{si } x\geq 1\end{cases}$

CB N°4 - Fonctions circulaires réciproques - Sujet 2

1. Question de cours : Montrer que $\sin(\text{Arccos}(x))=\sqrt{1-x^2}$

2. Calculer :

a. $\text{Arcsin}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\dfrac{\pi}{3}$

b. $\text{Arccos}\left(\cos\left(-\dfrac{7\pi}{5}\right)\right) = \text{Arccos}\left(\cos\left(2\pi-\dfrac{7\pi}{5}\right)\right)=\dfrac{3\pi}{5}$

c. $\text{Arcsin}\left(\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)\right) = \text{Arcsin}\left(\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{7\pi}{12}\right)\right)=-\dfrac{\pi}{12}$

3. x désigne un nombre réel.

a. Simplifier $\cos(\text{Arctan}(x))$ $=\sqrt{\cos^2(\text{Arctan}(x))}=\dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2(\text{Arctan}(x))}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

car $\text{Arctan}(x)\in\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ donc $\cos(\text{Arctan}(x))>0$

b. Résoudre l'équation

$$\text{Arccos}(2x)=\text{Arctan}(x)$$

Le domaine de validité est $\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$, et pour $x\in\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$, si x est solution alors en appliquant la fonction cos aux deux membres de l'égalité et on obtient : $2x=\cos(\text{Arctan}(x))$.

$2x=\cos(\text{Arctan}(x))\Leftrightarrow 2x=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\Leftrightarrow x\geq 0\wedge 4x^2(1+x^2)=1\Leftrightarrow x\geq 0\wedge x^2=\dfrac{-1\pm\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{\sqrt{\sqrt{2}-1}}{\sqrt{2}}$

Réciproquement : $x_0=\dfrac{\sqrt{\sqrt{2}-1}}{\sqrt{2}}$ est dans le domaine de validité et d'après l'analyse, $\cos(\text{Arccos}(2x_0))=\cos(\text{Arctan}(x_0))$ avec $\text{Arccos}(2x_0)$ et $\text{Arctan}(x_0)$ dans $[0,\pi]$, on a donc bien $\text{Arccos}(2x_0)=\text{Arctan}(x_0)$ d'où $x_0=\dfrac{\sqrt{\sqrt{2}-1}}{\sqrt{2}}$ vérifie l'égalité souhaitée.

$$S=\left\{\dfrac{\sqrt{\sqrt{2}-1}}{\sqrt{2}}\right\}$$

4. Soit f la fonction définie par $f(x) = \text{Arcsin}\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$.

a. Donner le domaine de définition et le domaine de dérivabilité de f, puis la dériver.

$\left|\dfrac{2x}{1+x^2}\right| \leq 1 \Leftrightarrow 2|x| \leq 1+x^2 \Leftrightarrow 0 \leq (|x|-1)^2$

Cette inégalité est toujours vérifiée, avec égalité si et seulement $x = \pm 1$.

Ainsi, f est définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ et pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ on a :

$$f'(x) = \frac{\frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2}}{\sqrt{1-\frac{4x^2}{(1+x^2)^2}}} = \frac{2(1-x^2)\sqrt{(1+x^2)^2}}{(1+x^2)^2\sqrt{(1-x^2)^2}} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)|x^2-1|} = \begin{cases} \dfrac{-2}{1+x^2} & \text{si } x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[\\ \dfrac{2}{1+x^2} & \text{si } x \in]-1,1[\end{cases}$$

b. En déduire une expression simplifiée de $f(x)$ pour x dans le domaine de définition de f.

D'après la question précédente, il existe C_1, C_2, C_3 dans $\mathbb{R}$ tels que :

$$f(x) = \begin{cases} -2\text{Arctan}(x) + C_1 & \text{si } x < -1 \\ 2\text{Arctan}(x) + C_2 & \text{si } x \in]-1,1[\\ -2\text{Arctan}(x) + C_3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$f(0) = 0$ donc $C_2 = 0$; de plus, f est continue $\mathbb{R}$ donc $f(-1) = -\dfrac{\pi}{2}$ donne $C_1 = -\pi$, et $f(1) = 0$ donne $C_3 = \pi$ d'où : $f(x) = \begin{cases} -2\text{Arctan}(x) - \pi & \text{si } x \leq -1 \\ 2\text{Arctan}(x) & \text{si } x \in [-1,1] \\ -2\text{Arctan}(x) + \pi & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$