CB n°6 - Suites numériques - Sujet 1

1. Questions de cours
Montrer que si (u_n) et (v_n) sont des suites réelles telles que pour $n \geq n_0, u_n \leq v_n$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

2. Établir la limite des suites suivantes, et justifier la réponse :

a. $u_n = \dfrac{\sin(n^2)}{n^2}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad -\dfrac{1}{n^2} \leq u_n \leq \dfrac{1}{n^2}$ donc le théorème d'encadrement donne $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

b. $v_n = n^2 \sin\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ $= \dfrac{\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}}$ or $\lim\limits_{u\to 0} \dfrac{\sin(u)}{u} = 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1$

c. $w_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{-k}$ $= \dfrac{1-\mathrm{e}^{-(n+1)}}{1-\mathrm{e}^{-1}}$ (somme de termes d'une suite géométrique de raison e^{-1}) ;
$\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-(n+1)} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{-1}} = \dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}$

d. $x_n = \sqrt{n^3+n} - n\sqrt{n}$ $= \dfrac{n^3+n-n^3}{\sqrt{n^3+n}+n\sqrt{n}} = \dfrac{n}{n\left(\sqrt{n+\frac{1}{n}}+\sqrt{n}\right)}$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$

3. Expliciter les suites suivantes en fonction de n :

a. $\begin{cases} u_0 = 0, \quad u_1 = 1 \\ u_{n+2} = 4u_{n+1} - 3u_n \qquad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$ $u_n = \dfrac{1}{2}(3^n - 1)$

b. $\begin{cases} u_0 = 1, \quad u_1 = 0 \\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n \qquad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$ $u_n = (\sqrt{2})^n \left(\cos\left(\dfrac{\pi}{4}n\right) - \sin\left(\dfrac{\pi}{4}n\right)\right)$

4. Établir les variations et la limite éventuelle des suites suivantes :

a. $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$
$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} + \dfrac{1}{n+1} = u_n + \dfrac{1}{n}$; une récurrence immédiate donne : $u_n + \dfrac{1}{n} = u_1 + 1 = 2$ d'où $u_n = 2 - \dfrac{1}{n}$. On en déduit que la suite est croissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$

b. $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1}{2}(u_n^2+7)} + 3 \qquad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$
Par composition, la fonction $f : x \mapsto \sqrt{\dfrac{1}{2}(x^2+7)} + 3$ est croissante sur $[3, +\infty[$ qui est un intervalle stable par f $(f(3) > 3)$.
On en déduit que la suite (u_n) est monotone. $u_1 > u_0$ donc la suite est croissante.
Comme f est continue sur $[3, +\infty[$, si la suite converge, elle converge vers un réel $L \in [3, +\infty[$ tel que $f(L) = L$.
$(f(L) = L) \Leftrightarrow \left(\sqrt{\dfrac{1}{2}(L^2+7)} + 3 = L\right) \Leftrightarrow \left((L \geq 3) \wedge \left(\dfrac{1}{2}(L^2+7) = (L-3)^2\right)\right) \Leftrightarrow (L = 11)$
f est croissante sur $[3, 11]$, $f(3) > 3$ et $f(11) = 11$ donc l'intervalle $[3, 11]$ est stable par f.

$u_0 \in [3, 11]$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [3, 11]$.
On en déduit que la suite est croissante, majorée, donc qu'elle converge vers $L = 11$.

5. On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$u_0 = -1, \quad v_0 = 2, \qquad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} : \quad \begin{cases} u_{n+1} = 4u_n - 2v_n \\ v_{n+1} = 3v_n - 3u_n \end{cases}$$

a. Montrer que $(u_n + v_n)_n$ est une suite constante.
$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} + v_{n+1} = 4u_n - 2v_n + 3v_n - 3u_n = u_n + v_n$;
on en déduit que la suite $(u_n + v_n)_n$ est constante et $\forall n \in \mathbb{N}, u_n + v_n = u_0 + v_0 = 1$.

b. En déduire que la suite (u_n) est arithmetico-géométrique.
D'après la question précédente, $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 1 - u_n$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 4u_n - 2(1 - u_n) = 6u_n - 2$.
La suite (u_n) est donc arithmetico-géométrique.

c. Expliciter u_n et v_n en fonction de n.
Soit $L \in \mathbb{R}$ tel que $L = -2 + 6L$, c'est-à-dire $L = \dfrac{2}{5}$.
$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (u_n - L)_n$ est une suite géométrique de raison 6 et de terme initial $u_0 - L = -\dfrac{7}{5}$.
On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \dfrac{2}{5} - \dfrac{7}{5} \times 6^n$ et par suite $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = 1 - u_n = \dfrac{3}{5} + \dfrac{7}{5} \times 6^n$.

d. Expliciter $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ en fonction de n.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{2}{5} - \frac{7}{5} \times 6^k\right) = \frac{2}{5}(n+1) - \frac{7}{5} \times \frac{1 - 6^{n+1}}{1 - 6} = \frac{2}{5}(n+1) - \frac{7}{25}\left(6^{n+1} - 1\right)$$

CB n°6 - Suites numériques - Sujet 2

1. Questions de cours

Montrer que si $(u_n), (v_n)$ et (w_n) sont des suites telles que pour $n \geq n_0, u_n \leq v_n \leq w_n$ et si de plus $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} w_n = l \in \mathbb{R}$ alors (v_n) converge vers l.

2. Établir la limite des suites suivantes, et justifier la réponse :

a. $u_n = \dfrac{1 - \cos(n^2)}{n^2}$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq u_n \leq \dfrac{2}{n^2}$ donc le théorème d'encadrement donne $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

b. $v_n = n^2 \left(1 - \cos\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right) \quad = \dfrac{1 - \cos\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}}$ or $\lim\limits_{u \to 0} \dfrac{1 - \cos(u)}{u} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$

c. $w_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2^{-k} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1 - 2^{-n}}{1 - 2^{-1}} = 1 - \dfrac{1}{2^n}$

(somme de termes d'une suite géométrique de raison 2^{-1} mais qui démarre à 1)

$\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{2^n} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = 1$

d. $x_n = n\sqrt{n^2 + n} - n^2 \quad = \dfrac{n^2(n^2 + n) - n^4}{n\sqrt{n^2 + n} + n^2} = \dfrac{n^3}{n^2\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1\right)}$ d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = +\infty$

3. Expliciter les suites suivantes en fonction de n :

a. $\begin{cases} u_0 = 1, \quad u_1 = 0 \\ u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n \qquad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$ $\qquad u_n = \dfrac{1}{4}\left(3^n + 3 \times (-1)^n\right)$

b. $\begin{cases} u_0 = 1, \quad u_1 = 0 \\ u_{n+2} = -2u_{n+1} - 4u_n \qquad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$ $\qquad u_n = 2^n \left(\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}n\right) + \dfrac{\sqrt{3}}{3} \sin\left(\dfrac{2\pi}{3}n\right)\right)$

4. Établir les variations et la limite éventuelle des suites suivantes :

a. $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) \qquad \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} - u_n = \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) \geq 0$ donc la suite est croissante.

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} - u_n = \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln(n)$ donc $u_{n+1} - \ln(n+1) = u_n - \ln(n)$ et une récurrence immédiate donne : $u_n - \ln(n) = u_1 - \ln(1) = 1$ d'où $u_n = \ln(n) + 1$ on en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

b. $\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{u_n^2 + 1} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

Une rapide étude de variations montre que $f : x \mapsto \dfrac{2x}{x^2 + 1}$ est croissante sur $[-1, 1]$. $f(-1) = -1$ et $f(1) = 1$ donc l'intervalle $[-1, 1]$ est stable par f.

On en déduit que la suite (u_n) est monotone. $u_1 > u_0$ donc la suite est croissante.

$u_0 \in [-1, 1]$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [-1, 1]$.

On en déduit que la suite est croissante, majorée, donc qu'elle converge vers $L \in [u_0, 1]$ tel que $f(L) = L$, car f est continue.
$\big(f(L) = L\big) \Leftrightarrow \big(2L = L(L^2 + 1)\big) \Leftrightarrow \big(L(1 - L^2) = 0\big) \Leftrightarrow \big(L \in \{0, -1, 1\}\big)$.
On en déduit que $L = 1$.

5. On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$u_0 = 1, \quad v_0 = 2, \qquad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} : \quad \begin{cases} u_{n+1} = 3u_n + 2v_n \\ v_{n+1} = 2u_n + 3v_n \end{cases}$$

a. Montrer que $(u_n - v_n)_n$ est une suite constante.
$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - v_{n+1} = 3u_n + 2v_n - 2u_n - 3v_n = u_n - v_n$;
on en déduit que la suite $(u_n - v_n)_n$ est constante et $\forall n \in \mathbb{N}, u_n - v_n = u_0 - v_0 = -1$.

b. En déduire que la suite (u_n) est arithmetico-géométrique.
D'après la question précédente, $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 1 + u_n$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3u_n + 2(1 + u_n) = 5u_n + 2$.
La suite (u_n) est donc arithmetico-géométrique.

c. Expliciter u_n et v_n en fonction de n.
Soit $L \in \mathbb{R}$ tel que $L = 2 + 5L$, c'est-à-dire $L = -\dfrac{1}{2}$.
$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (u_n - L)_n$ est une suite géométrique de raison 5 et de terme initial $u_0 - L = \dfrac{3}{2}$.
On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2} \times 5^n$ et par suite $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = 1 + u_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2} \times 5^n$.

d. Expliciter $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ en fonction de n.
$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \times 5^k\right) = -\frac{1}{2}(n+1) + \frac{3}{2} \times \frac{1 - 5^{n+1}}{1 - 5} = -\frac{1}{2}(n+1) + \frac{3}{8}\left(5^{n+1} - 1\right)$