CB n°7 - Matrices - Systèmes linéaires - Sujet 1

1. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a. Montrer que A est inversible et déterminer son inverse.
On montre que A est inversible en l'inversant, et on obtient :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

b. En déduire la solution du système :

$$\begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ -x + 2y + z = 3 \\ 2x - z = 1 \end{cases}$$

On calcule $A^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, et on obtient :

$$S = \{(2;1;3)\}$$

2. Résoudre les systèmes suivants :

a. $\begin{cases} 2x - 4y + z = 1 \\ x - 3z = 2 \\ -3x + 8y - 5z = 0 \end{cases}$ $\quad S = \left\{ \left(2 + 3z; \frac{3}{4} + \frac{7}{4}z; z\right), z \in \mathbb{R} \right\}$

b. $\begin{cases} 2y + 3z = -1 \\ -x + 2y - z = -2 \\ 2x - 2y + 5z = 3 \\ x + 4z = -1 \end{cases}$ $\quad S = \varnothing$

3. Résoudre le système suivant, en fonction des valeurs du paramètre a :

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ 2x - y + z = 2 \\ 3x + 2z = 1 \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$ Si $a \neq -1$, $\quad S = \varnothing$

$\rightsquigarrow$ Si $a = -1$, $\quad S = \left\{ \left(\frac{1}{3}(1 - 2z); -\frac{1}{3}(4 + z); z\right), z \in \mathbb{R} \right\}$

CB N°7 - MATRICES - SYSTÈMES LINÉAIRES - SUJET 2

1. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a. Montrer que A est inversible et déterminer son inverse.
On montre que A est inversible en l'inversant, et on obtient :

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

b. En déduire la solution du système :

$$\begin{cases} 3x + y + 2z = -1 \\ 4x - y + 3z = 3 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

On calcule $A^{-1}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ et on obtient :

$$S = \{(1; -2; -1)\}$$

2. Résoudre les systèmes suivants :

a. $\begin{cases} -x + 2y - 3z = 4 \\ 2x + 2z = 3 \\ 3x - 2y + 5z = -1 \\ 3x + 2y + z = 10 \end{cases}$ $\quad S = \left\{ \left(\frac{3}{2} - z; \frac{11}{4} + z; z \right), z \in \mathbb{R} \right\}$

b. $\begin{cases} 3y + 2z = -1 \\ -2x + 4y - z = 2 \\ 2x + 2y + 5z = 0 \end{cases}$ $\quad S = \varnothing$

3. Résoudre le système suivant, en fonction des valeurs du paramètre a :

$$\begin{cases} x - y + 2z = a \\ 2x + 3y - z = 0 \\ 3x - 2y + 5z = 1 \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$ Si $a \neq \frac{5}{13}$, $\quad S = \varnothing$

$\rightsquigarrow$ Si $a = \frac{5}{13}$, $\quad S = \left\{ \left(\frac{3}{13} - z; -\frac{2}{13} + z; z \right), z \in \mathbb{R} \right\}$