CB N°9 - GÉOMÉTRIE - SUJET 1

Exercice 1 : Géométrie du plan
Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct, on considère les points A, B et C de coordonnées respectives $(-1;1),(2;-3),(-2;3)$.

1. Calculer l'aire du triangle ABC à l'aide d'un déterminant.
Aire $(ABC) = \dfrac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\right| = 1$

2. Établir une équation cartésienne de la droite (AB).
$M(x;y) \in (AB) \Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB}\right) = 0 \Leftrightarrow 4x+3y+1=0$

3. Calculer la distance de C à (AB) : $\mathrm{d}\left(C,(AB)\right) = \dfrac{|4\times(-2)+3\times 3+1|}{\sqrt{16+9}} = \dfrac{2}{5}$

et retrouver l'aire du triangle ABC. Aire$(ABC) = \dfrac{\mathrm{d}\left(C,(AB)\right)\times AB}{2} = 1$

Exercice 2 : Géométrie de l'espace
L'espace $\mathscr{E}$ est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.
On considère les points A, B, C et D de coordonnées respectives $(-1;1;1),(0;-1;2),(2;-2;1),(1;0;3)$ et les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de coordonnées respectives $(1;0;-1)$ et $(0;1;-2)$ dans la base $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

1. Question de cours :
Énoncer la formule permettant de calculer la distance entre un point M et une droite $\Delta = N+\mathrm{Vect}\{\vec{u}\}$, et la démontrer.

2a. Établir une équation cartésienne du plan $\mathscr{P} = (ABC)$.
$M(x;y;z) \in (ABC) \Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) = 0 \Leftrightarrow x+y+z-1=0$

b. Établir une équation cartésienne du plan $\mathscr{Q} = D+\mathrm{Vect}\left\{\vec{u},\vec{v}\right\}$.
$M \in \mathscr{Q} \Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{DM};\vec{u};\vec{v}\right) = 0 \Leftrightarrow x+2y+z-4=0$

c. Donner un système d'équations paramétriques de la droite $\mathscr{D}$ intersection des plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$.
$$M(x;y;z) \in \mathscr{D} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y+z-1=0 \\ x+2y+z-4=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-2-t \\ y=3 \\ z=t \end{array}\right. \quad , \quad t\in\mathbb{R}$$

d. Déterminer la distance du point O à la droite $\mathscr{D}$.
D'après la question précédente :
$$\mathscr{D} = T+\mathrm{Vect}\left\{\vec{s}\right\} \text{ où } T(-2;3;0) \text{ et } \vec{s} = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} \text{ d'où } \mathrm{d}(O,\mathscr{D}) = \frac{\|\overrightarrow{OT}\wedge\vec{s}\|}{\|\vec{s}\|} = \sqrt{11}$$

CB N°9 - GÉOMÉTRIE - SUJET 2

Exercice 1 : Géométrie du plan

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct, on considère les points A, B et C de coordonnées respectives $(-1;0), (2;4), (3;3)$.

1. Calculer l'aire du triangle ABC à l'aide d'un déterminant.

Aire $(ABC) = \frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)\right| = \frac{7}{2}$

2. Établir une équation cartésienne de la droite (AB).

$M(x;y) \in (AB) \Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{AB}\right) = 0 \Leftrightarrow 4x - 3y + 4 = 0$

3. Calculer la distance de C à (AB) $\mathrm{d}\left(C, (AB)\right) = \frac{|4\times 3 - 3\times 3 + 4|}{\sqrt{16+9}} = \frac{7}{5}$

et retrouver l'aire du triangle ABC. Aire$(ABC) = \frac{\mathrm{d}\left(C,(AB)\right)\times AB}{2} = \frac{7}{2}$

Exercice 2 : Géométrie de l'espace

L'espace $\mathscr{E}$ est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$.

On considère les points A, B, C et D de coordonnées respectives $(1;0;-1), (0;1;1), (2;-1;1), (0;0;2)$ et les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de coordonnées respectives $(1;1;0)$ et $(0;1;-1)$ dans la base $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$.

1. Question de cours :

Énoncer la formule permettant de calculer la distance entre un point M de coordonnées $(x_0;y_0;z_0)$ et un plan d'équation cartésienne $ax+by+cz+d=0$, et la démontrer.

2a. Établir une équation cartésienne du plan $\mathscr{P} = (ABC)$.

$M(x;y;z) \in (ABC) \Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}\right) = 0 \Leftrightarrow x + y - 1 = 0$

b. Établir une équation cartésienne du plan $\mathscr{Q} = D + \mathrm{Vect}\left\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right\}$.

$M \in \mathscr{Q} \Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{DM}; \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}\right) = 0 \Leftrightarrow -x + y + z - 2 = 0$

c. Donner un système d'équations paramétriques de la droite $\mathscr{D}$ intersection des plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$.

$$M(x;y;z) \in \mathscr{D} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y-1=0 \\ -x+y+z-2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = t \\ y = 1-t \\ z = 1+2t \end{array}\right. \quad , \quad t \in \mathbb{R}$$

d. Déterminer la distance du point O à la droite $\mathscr{D}$.

D'après la question précédente :

$$\mathscr{D} = T + \mathrm{Vect}\left\{\overrightarrow{s}\right\} \text{ où } T(0;1;1) \text{ et } \overrightarrow{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ d'où } \mathrm{d}(O, \mathscr{D}) = \frac{\|\overrightarrow{OT} \wedge \overrightarrow{s}\|}{\|\overrightarrow{s}\|} = \sqrt{\frac{11}{6}}$$