Math. - CC 1 - Correction

EXERCICE 1

Résoudre les systèmes suivants (pour le second, on discutera en fonction des valeurs du paramètre réel k) :

$\begin{cases} x - y + 3z = 1 \\ x + 3y - z = 0 \\ y - 2z = 2 \end{cases}$ $\quad S = \left\{\left(\frac{21}{4}, -\frac{5}{2}, -\frac{9}{4}\right)\right\}$

$\begin{cases} 3x + y + kz = 0 \\ x + z = 1 \\ x + ky - z = 2 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} \varnothing & \text{si } k \in \{1,2\} \\ \left(\frac{k^2+3}{k^2-3k+2}, \frac{9-k}{-k^2+3k-2}, \frac{1+3k}{-k^2+3k-2}\right) & \text{sinon} \end{cases}$

EXERCICE 2

Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$:

1. $|x^2 + x - 1| \leq |2x + 1| \quad \Leftrightarrow (2x+1)^2 - (x^2 + x - 1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x^2 + 3x)(-x^2 + x + 2) \geq 0$
$S = [-3, -1] \cup [0, 2]$

2. $x - 2 < \sqrt{x^2 + 2x - 3}$
Domaine de validité : $]-\infty, -3] \cup [1, +\infty[$
$\rightsquigarrow$ Si $x < 2$, l'inégalité est vérifiée.
$\rightsquigarrow$ Si $x \geq 2$, les deux membres de l'inégalité étant positifs, on applique la fonction "carrée" et l'inégalité équivaut à $x > \frac{7}{6}$
Finalement, $S =]-\infty, -3] \cup [1, +\infty[$

3. $\cos(2x) \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \leq 2x \leq \frac{\pi}{4} + 2k\pi \qquad S = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{8} + k\pi, \frac{\pi}{8} + k\pi\right]$

EXERCICE 3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit trois sommes u_n, v_n et w_n par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, \qquad v_n = \sum_{k=1}^{n} k^2, \qquad \text{et} \qquad w_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{v_k}$$

1. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

- $v_1 = 1 = \frac{1 \times 2 \times 3}{6}$
- $\forall n \in \mathbb{N}^*, \left(v_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \Rightarrow v_{n+1} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}\right)$

Par principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

2. Déterminer les réels a, b et c vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{n(n+1)(2n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{2n+1} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \frac{4}{2n+1}$$

3. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1} = u_{2n+1} - \frac{1}{2}u_n - 1$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1}\right) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} = \sum_{k=2}^{2n+1} \frac{1}{k} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = u_{2n+1} - 1 - \frac{1}{2}u_n$$

4. Exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ w_n à l'aide des termes de la suite (u_n).

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$w_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{v_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{6}{k(k+1)(2k+1)} = 6\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} - \frac{4}{2k+1}\right) = 6\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1} - \sum_{k=1}^{n}\frac{4}{2k+1}\right)$$

$$= 6\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + \sum_{j=2}^{n+1}\frac{1}{j} - \sum_{k=1}^{n}\frac{4}{2k+1}\right) = 6\left(u_n + u_{n+1} - 1 - 4\left(u_{2n+1} - \frac{1}{2}u_n - 1\right)\right) = 6\left(3u_n + u_{n+1} - 4u_{2n+1} + 3\right)$$

EXERCICE 4

Pour $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, on définit

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} (-1)^k \ln\left(\frac{k+1}{k-1}\right)$$

1. En faisant apparaître un télescopage, montrer que pour $n \geq 2$,

$$S_n = (-1)^n \ln(n+1) + (-1)^{n-1}\ln(n) + \ln(2)$$

Pour $n \geq 2$ on a :

$$S_n = \sum_{k=2}^{n}(-1)^k \ln\left(\frac{(k+1)\times k}{k \times (k-1)}\right) = \sum_{k=2}^{n}\left((-1)^k \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) - (-1)^{k-1}\ln\left(\frac{k}{k-1}\right)\right)$$

En notant, pour $k \geq 2, v_k = (-1)^{k-1}\ln\left(\frac{k}{k-1}\right)$, on a : $S_n = \sum_{k=2}^{n}(v_{k+1} - v_k)$.

Par télescopage, on obtient pour $n \geq 2$:

$$S_n = v_{n+1} - v_2 = (-1)^n \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - (-1)^1 \ln\left(\frac{2}{1}\right) = (-1)^n\ln(n+1) + (-1)^{n-1}\ln(n) + \ln(2)$$

2. En déduire que la suite $(S_n)_{n\geq 2}$ converge, et déterminer sa limite.

Pour $n \geq 2, S_n = (-1)^n \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) + \ln(2) = (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln(2)$;

on en déduit que la suite (S_n) converge vers $\ln(2)$.

EXERCICE 5

On rappelle que

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

1. Montrer que

$$\forall t > 1, \quad \ln(t) > 2\frac{t-1}{t+1}$$

On considère la fonction $f : t \mapsto \ln(t) - 2\frac{t-1}{t+1}$ définie sur $I =]1, +\infty[$.

f est dérivable sur I comme différence de fonctions dérivables, et pour $t > 1$,

$$f'(t) = \frac{1}{t} - 2\frac{2}{(1+t)^2} = \frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}$$

$\forall t \in I, f'(t) > 0$ donc f est strictement croissante sur I ; comme $\lim_{t \to 1^+} f(t) = 0$, on en déduit que f est strictement positive sur I et par suite que $\forall t > 1, \ln(t) > 2\frac{t-1}{t+1}$.

et en déduire que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, 0 < x < y \Longrightarrow \frac{y-x}{\ln(y) - \ln(x)} < \frac{x+y}{2}$$

Soient x et y dans $\mathbb{R}_+^*$ tels que $x < y$. On a $\frac{y}{x} > 1$ donc d'après ce qui précède :

$$\ln\left(\frac{y}{x}\right) > 2\frac{\frac{y}{x} - 1}{\frac{y}{x} + 1} \Leftrightarrow \ln(y) - \ln(x) > 2\frac{y-x}{y+x}.$$

Les deux membres de cette inégalité étant strictement positifs, on a également

$\frac{1}{\ln(y) - \ln(x)} < \frac{y+x}{2(y-x)}$ puis, par positivité stricte de $y - x$: $\frac{y-x}{\ln(y)-\ln(x)} < \frac{x+y}{2}$

2. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)}$$

Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n < \frac{n(n+1)(4n+5)}{12}$$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$\dfrac{k}{\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)} = \dfrac{k}{\ln(k+1)-\ln(k)} = \dfrac{k+1-k}{\ln(k+1)-\ln(k)} \times k$ donc d'après ce qui précède,

$\dfrac{k}{\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)} < \dfrac{k+1+k}{2} \times k$

Ainsi, on a pour $n \geq 1$:

$S_n < \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(k^2 + \frac{1}{2}k\right) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{4} = \frac{n(n+1)(4n+5)}{12}$

EXERCICE 6

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1-x^2}\right)$$

où $x \in \mathbb{R}$.

1. Justifier que f est définie sur $I = \left]-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]$.

f est définie pour les réels x tels que $x + \sqrt{1-x^2} > 0$.

Il faut tout d'abord $1 - x^2 \geq 0$ donc $x \in [-1, 1]$.

De plus, $x + \sqrt{1-x^2} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} > -x$ qui est toujours vérifié pour $x \in]0, 1]$.

Si $x \leq 0$ les deux membres étant positifs, on applique la fonction "carré" et on obtient $x^2 < \dfrac{1}{2}$ c'est-à-dire, puisque $x \leq 0$, $x \in \left]-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 0\right]$.

Finalement, $f(x)$ est définie pour $x \in I$.

2. En admettant que f est continue sur I et dérivable sur $I \setminus \{1\}$, déterminer $f'(x)$ et en déduire le tableau de variations complet de f (limites aux bornes comprises).

$\forall x \in I \setminus \{1\}, f'(x) = \dfrac{1 - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{x + \sqrt{1-x^2}} = \dfrac{\sqrt{1-x^2} - x}{\sqrt{1-x^2}\left(x + \sqrt{1-x^2}\right)} = \dfrac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)^2}$,

qui est du signe de $1 - 2x^2$.

De plus, $\displaystyle\lim_{x \to -\frac{\sqrt{2}}{2}^+} x + \sqrt{1-x^2} = 0^+$ donc $\displaystyle\lim_{x \to -\frac{\sqrt{2}}{2}^+} f(x) = -\infty$.

On en déduit le tableau suivant :

x	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		1
$f'(x)$		$+$	0	-	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{\ln(2)}{2}$	$\searrow$	0

3. Soit M le maximum de f sur I. Déterminer M, puis justifier que f établit une bijection entre deux intervalles de la forme $J = \left]-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, a\right]$ et $K =]b; M]$.

Le tableau de variations donne $M = \dfrac{\ln(2)}{2}$; la continuité et la monotonie de f permettent d'appliquer le théorème de bijection :

f établit une bijection entre $J = \left]-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$ et $K = \left]-\infty, \dfrac{\ln(2)}{2}\right]$

4. Sot $y \in K$. Déterminer explicitement l'unique solution dans J de l'équation

$$f(x) = y$$

Pour $y \in K$, on a :
$f(x) = y \Rightarrow x + \sqrt{1-x^2} = \mathrm{e}^y \Rightarrow 1 - x^2 = \mathrm{e}^{2y} - 2x\mathrm{e}^y + x^2 \Rightarrow 2x^2 - 2x\mathrm{e}^y + \mathrm{e}^{2y} - 1 = 0$
$\Delta = 4\mathrm{e}^{2y} - 8\left(\mathrm{e}^{2y} - 1\right) = 4\left(2 - \mathrm{e}^{2y}\right)$; comme $y \leq \dfrac{\ln(2)}{2}$, on a $\Delta \geq 0$ et donc
$x = \dfrac{2\mathrm{e}^y \pm 2\sqrt{2-\mathrm{e}^{2y}}}{4} = \dfrac{\mathrm{e}^y \pm \sqrt{2-\mathrm{e}^{2y}}}{2}$
D'après la question précédente, on sait que l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution lorsque $y \in K$ donc c'est l'une des précédentes.
On a $2x = \mathrm{e}^y \pm \sqrt{2-\mathrm{e}^{2y}} = x + \sqrt{1-x^2} \pm \sqrt{2-\mathrm{e}^{2y}}$ donc $x - \sqrt{1-x^2} = \pm\sqrt{2-\mathrm{e}^{2y}}$.
$x - \sqrt{1-x^2} > 0 \Leftrightarrow x > \sqrt{1-x^2}$ ce qui n'est pas vérifié pour $x < 0$ et si $x \geq 0$ cela équivaut à $2x^2 > 1$ ce qui n'est pas vérifié sur J. On en déduit que pour $x \in J, x - \sqrt{1-x^2} \leq 0$ et donc que $x = \dfrac{\mathrm{e}^y - \sqrt{2-\mathrm{e}^{2y}}}{2}$.

5. On rappelle que $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$. Déterminer

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

Pour $h < 0$, tel que $1 + h \in I$ on a :
$\dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = \dfrac{\ln\left(1 + \left(h + \sqrt{-h^2 - 2h}\right)\right)}{h} = \dfrac{\ln\left(1 + \left(h + \sqrt{-h^2 - 2h}\right)\right)}{h + \sqrt{-h^2 - 2h}} \times \dfrac{h + \sqrt{-h^2 - 2h}}{h}$
En notant $u = h + \sqrt{-h^2 - 2h}$ on a $\displaystyle\lim_{h \to 0^-} \frac{\ln\left(1 + \left(h + \sqrt{-h^2 - 2h}\right)\right)}{h + \sqrt{-h^2 - 2h}} = \lim_{u \to 0^-} \frac{\ln(1+u)}{u} = 1$
de plus, $\dfrac{h + \sqrt{-h^2 - 2h}}{h} = 1 + \dfrac{\sqrt{-h^2 - 2h}}{h} = 1 + \dfrac{\sqrt{-h}\sqrt{2+h}}{h} = 1 + \dfrac{\sqrt{2+h}}{\sqrt{-h}} \underset{h \to 0^-}{\longrightarrow} +\infty$
Finalement, $\displaystyle\lim_{h \to 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = +\infty$

En donner une interprétation graphique.
La courbe de f admet un tangente verticale en 1.