Math. - CC 2 - Correction

EXERCICE 1

Soit a un complexe non nul. Déterminer les complexes z tels que

$$\mathrm{e}^z = a$$

$a \neq 0$ donc $\mathrm{Re}(z) = \ln(|a|)$ et $\mathrm{Im}(z) = \arg(a) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$.

EXERCICE 2

Soit le polynôme

$$Q(z) = z^3 - (9+\mathrm{i})z^2 + (28+5\mathrm{i})z - 32 - 4\mathrm{i}$$

1. Montrer que 4 est une racine de Q, et déterminer le polynôme R tel que

$$Q(z) = (z-4)R(z)$$

$Q(4) = 0$ donc 4 est une racine de Q, et on a : $Q(z) = (z-4)(z^2 - (5+\mathrm{i})z + 8 + \mathrm{i})$

2. Déterminer alors les racines de Q.
$\Delta = -8 + 6\mathrm{i} = (1+3\mathrm{i})^2$. On en déduit les racines de Q : $4, 3+2\mathrm{i}$ et $2-\mathrm{i}$

3. On considère le triangle dont les sommets ont pour affixes les racines de Q. Justifier qu'il est rectangle isocèle.
$\dfrac{2-\mathrm{i}-4}{3+2\mathrm{i}-4} = \mathrm{i}$.
Ainsi, le triangle dont les sommets ont pour affixe les racines de Q est rectangle isocèle en le sommet d'affixe 4.

EXERCICE 3

Soit n un entier naturel tel que $n \geq 2$, et $\omega_k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}}$, $k \in [\![0, n-1]\!]$, les racines n-ème de l'unité.

1. Rappeler la valeur de la somme

$$S_1 = \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k$$

et le justifier.
$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}} \neq 1$ donc, en reconnaissant une somme de termes consécutifs d'une suite géométrique, on a :

$$S_1 = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}}\right)^k = \frac{1 - \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}}\right)^n}{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}}} = 0$$

2. Soit $p \in [\![1, n]\!]$. On considère la somme

$$S_p = \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k^p$$

Déterminer la valeur de S_p.

$\rightsquigarrow$ Si $p = n$ alors $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $\omega_k^p = 1$ donc $S_n = n$.
$\rightsquigarrow$ Si $1 \leq p \leq n-1$ alors on reconnait la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2p\pi}{n}} \neq 1$ donc on obtient $S_p = \dfrac{1 - \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2p\pi}{n}}\right)^n}{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2p\pi}{n}}} = 0$

3. Soit la somme

$$R = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \omega_k$$

Montrer que R est un réel.

La formule du binôme de Newton donne : $R = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}}\right)^k 1^{n-k} - \binom{n}{n} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}}\right)^n = \left(1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}}\right)^n - 1$.

La formule de l'arc moitié donne ensuite : $R = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{n}} 2\cos\left(\dfrac{\pi}{n}\right)\right)^n - 1 = -2^n \cos^n\left(\dfrac{\pi}{n}\right) - 1 \in \mathbb{R}$.

EXERCICE 4

Soit le polynôme

$$P(z) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left((z+\mathrm{i})^5 - (z-\mathrm{i})^5\right)$$

1. Déterminer les racines de P, et montrer qu'elles sont toutes réelles.
On pourra s'aider des racines $5^{\text{ème}}$ de l'unité.

$P(z) = 0 \Leftrightarrow (z+\mathrm{i})^5 = (z-\mathrm{i})^5$. i n'est pas solution donc on a :

$P(z) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}\right)^5 = 1 \Leftrightarrow \exists k \in [\![0,4]\!], \quad \frac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{5}} \Leftrightarrow \exists k \in [\![0,4]\!], \quad z\left(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{5}}\right) = -\mathrm{i}\left(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{5}}\right)$

la valeur $k=0$ ne permet pas de vérifier l'égalité donc on a :

$P(z) = 0 \Leftrightarrow \exists k \in [\![1,4]\!], \quad z = \frac{-\mathrm{i}\left(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{5}}\right)}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{5}}} = \frac{-\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{k\pi}{5}}\,2\cos\left(\frac{k\pi}{5}\right)}{-2\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{k\pi}{5}}\sin\left(\frac{k\pi}{5}\right)} = \frac{1}{\tan\left(\frac{k\pi}{5}\right)}$

2. A l'aide du binôme de Newton, développer et réduire $P(z)$, puis déterminer une autre expression de ses racines.

$P(z) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k} z^{5-k}\mathrm{i}^k - \sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k} z^{5-k}(-\mathrm{i}))^k\right) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k} z^{5-k}\mathrm{i}^k(1-(-1)^k)$

$= \frac{1}{2\mathrm{i}}\sum_{k=0}^{2}\binom{5}{2k+1} z^{5-2k-1}(-1)^k\mathrm{i}\times 2 = 5z^4 - 10z^2 + 1$

$P(z) = 0$ équivaut donc à z^2 solution de l'équation $5X^2 - 10X + 1 = 0$ donc $z^2 = 1 \pm 2\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Finalement on trouve les racines de P : $\quad \pm\sqrt{1 \pm 2\frac{\sqrt{5}}{5}}$

3. En déduire les valeurs exactes de

$$\tan\left(\frac{\pi}{5}\right) \quad \text{et} \quad \tan\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$

La fonction tan est croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, et positive sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$; on a donc $\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)} > \frac{1}{\tan\left(\frac{2\pi}{5}\right)} > 0$.

On en déduit donc que $\tan\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+2\frac{\sqrt{5}}{5}}}$ et $\tan\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-2\frac{\sqrt{5}}{5}}}$.

EXERCICE 5

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \text{Arccos}\left(\frac{x}{\sqrt{2x^2-4x+4}}\right)$$

1. Donner le domaine de définition D_f et le domaine de dérivabilité $D_{f'}$ de f.

$\forall x \in \mathbb{R}, 2x^2 - 4x + 4 > 0$ (discriminant strictement positif) ;

$\left|\frac{x}{\sqrt{2x^2-4x+4}}\right| \leq 1 \Leftrightarrow x^2 \leq 2x^2 - 4x + 4 \Leftrightarrow 0 \leq (x-2)^2$

Cette dernière inéquation est toujours vérifiée, avec égalité si, et seulement si $x = 2$.

On en déduit que $D_f = \mathbb{R}$ et $D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

2. a. Exprimer simplement $f(1+\tan(u))$ pour $u \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

$f(1+\tan(u)) = \text{Arccos}\left(\frac{1+\tan(u)}{\sqrt{2(\tan^2(u)+1)}}\right) = \text{Arccos}\left(\frac{(1+\tan(u))|\cos(u)|}{\sqrt{2}}\right)$.

$\cos(u) > 0$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ donc

$f(1+\tan(u)) = \text{Arccos}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(u) + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(u)\right) = \text{Arccos}\left(\cos\left(u - \frac{\pi}{4}\right)\right)$ d'où :

$$f(1+\tan(u)) = \begin{cases} -u + \frac{\pi}{4} & \text{si } u \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right] \\ u - \frac{\pi}{4} & \text{si } u \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[\end{cases}$$

b. En déduire une forme simplifiée de $f(x)$ pour $x \in D_f$.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{4} - \text{Arctan}(x-1) & \text{si } x \leq 2 \\ \text{Arctan}(x-1) - \dfrac{\pi}{4} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

3. Retrouver le résultat précédent en dérivant f sur $D_{f'}$.

Pour $x \neq 2$ on a :

$$f'(x) = -\frac{\frac{\sqrt{2x^2-4x+4} - \frac{(2x-2)x}{\sqrt{2x^2-4x+4}}}{2x^2-4x+4}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{2x^2-4x+4}}} = \frac{2(x-2)}{2(x^2-2x+2)\sqrt{(x-2)^2}} = \frac{x-2}{((x-1)^2+1)|x-2|} = \begin{cases} \dfrac{1}{(x-1)^2+1} & \text{si } x > 2 \\ \dfrac{-1}{(x-1)^2+1} & \text{si } x < 2 \end{cases}$$

Par suite, il existe deux constantes C_1 et C_2 telles que pour $x \in D_{f'}$:

$$f(x) = \begin{cases} \text{Arctan}(x-1) + C_1 & \text{si } x > 2 \\ -\text{Arctan}(x-1) + C_2 & \text{si } x < 2 \end{cases}$$

La continuité de f en 2 avec $f(2) = 0$ donne $C_1 = -\dfrac{\pi}{4}$ et $C_2 = \dfrac{\pi}{4}$.

EXERCICE 6

I. Résultats préliminaires

1. Montrer que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \sin(2\text{Arctan}(t)) = \frac{2t}{1+t^2}$$

$\forall t \in \mathbb{R}, \sin(2\text{Arctan}(t)) = 2\sin(\text{Arctan}(t))\cos(\text{Arctan}(t)) = 2\tan(\text{Arctan}(t))\cos^2(\text{Arctan}(t)) = \dfrac{2\tan(\text{Arctan}(t))}{1+\tan^2(\text{Arctan}(t))}$

On trouve bien : $\forall t \in \mathbb{R}, \quad \sin(2\text{Arctan}(t)) = \dfrac{2t}{1+t^2}$

2. A l'aide du changement de variable $t = \tan(u)$ calculer

$$\int^x \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2}$$

$$\int^x \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2} \underbrace{=}_{\substack{t = \tan u \\ \mathrm{d}t = (1+\tan^2(u))\mathrm{d}u}} \int^{\text{Arctan}(x)} \cos^2(u)\mathrm{d}u = \int^{\text{Arctan}(x)} \frac{1+\cos(2u)}{2}\mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{2}\left(\text{Arctan}(x) + \frac{1}{2}\sin(2\text{Arctan}(x))\right) + C = \frac{1}{2}\left(\text{Arctan}(x) + \frac{x}{1+x^2}\right) + C \qquad \text{où } C \in \mathbb{R}.$$

3. En remarquant que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \frac{1}{(1+t^2)^2} = \frac{1}{1+t^2} - \frac{t^2}{(1+t^2)^2}$$

retrouver le résultat précédent, à l'aide d'une intégration par parties.

On note $I(x) = \displaystyle\int^x \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t$. On pose $\begin{cases} u(t) = t \Rightarrow u'(t) = 1 \\ v'(t) = \dfrac{t}{(1+t^2)^2} \Leftarrow v(t) = \dfrac{-1}{2(1+t^2)} \end{cases}$

u et v sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ donc le théorème d'intégration par parties donne :

$$I(x) = \frac{-x}{2(1+x^2)} + \int^x \frac{1}{2(1+t^2)}\mathrm{d}t = \frac{-x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\text{Arctan}(x) + C \quad \text{où } C \in \mathbb{R}.$$

Ainsi, $\displaystyle\int^x \frac{1}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t = \int^x \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t - \int^x \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\text{Arctan}(x) + \frac{x}{2(1+x^2)} + C \qquad \text{où } C \in \mathbb{R}.$

II. Résolution d'une équation différentielle

L'objectif de cette partie est de résoudre l'équation différentielle :

$$(H_0) \qquad (x^2+1)y'' - 2y = 0$$

1. Chercher une solution non nulle de (H_0) sous la forme $y_p : x \mapsto ax^2 + bx + c$, où a, b et c désignent des constantes réelles.

$y_p \in S_{H_0} \Leftrightarrow \left(\forall x \in \mathbb{R},\ (x^2+1)2a - 2(ax^2+bx+c) = 0\right) \Leftrightarrow \left(\forall x \in \mathbb{R},\ -2bx + 2(a-c) = 0\right) \Leftrightarrow (b = 0 \wedge a = c)$

$y_p : x \mapsto x^2 + 1$ convient.

2. On note $h : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2+1 \end{array} \right.$, et λ une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

a. Montrer que la fonction $f = \lambda h$ est solution de (H_0) si, et seulement si λ' est solution de l'équation différentielle :

$$(H_1) \qquad (1+x^2)y' + 4xy = 0$$

$$\begin{aligned} f \in S_{H_0} &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad (x^2+1)(\lambda''h + 2\lambda'h' + \lambda h'') - 2\lambda h = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda\underbrace{\left((1+x^2)h'' - 2h\right)}_{=0 \text{ car } h \in S_{H_0}} + (1+x^2)\left(\lambda''h + 2\lambda'h'\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda''(1+x^2) + 2\lambda' \times 2x = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad (1+x^2)\left(\lambda'\right)' + 4x\lambda' = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda' \in S_{H_1} \end{aligned}$$

b. Résoudre (H_1).

$\displaystyle\int^x -\frac{4t}{1+t^2}\mathrm{d}t = -2\ln(1+x^2) + C^{te}$ et $\mathrm{e}^{-2\ln(1+x^2)} = \dfrac{1}{(1+x^2)^2}$, on a donc :

$S_{H_1} = \left\{\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \varphi(x) = \dfrac{C}{(1+x^2)^2}, C \in \mathbb{R}\right\}$

c. En déduire l'ensemble des solutions de (H_0).

D'après les questions précédentes, $f = \lambda h$ est solution de (H_0) si et seulement s'il existe $C_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda'(x) = \dfrac{C_0}{(1+x^2)^2}$.

On déduit de la première partie que $\lambda(x) = \dfrac{C_0}{2}\left(\mathrm{Arctan}(x) + \dfrac{x}{1+x^2}\right) + C_1$ où $C_1 \in \mathbb{R}$, et par suite

$f(x) = C_1(1+x^2) + C_2\left(\mathrm{Arctan}(x)(1+x^2) + x\right)$ où $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

Finalement,

$$S_{H_0} = \left\{\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \varphi(x) = (1+x^2)\left(C_1 + C_2\mathrm{Arctan}(x)\right) + C_2 x, (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2\right\}$$