Math. - CC 4 - Correction

EXERCICE I

On considère les ensembles suivants :
$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y - 2z = 0\}$
$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x - 6y = 0\}$
$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 2x + y - 3z = 0\}$

1. Montrer que E, F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ et en déterminer des bases.
$E = \text{Vect}\{(-1, 1, 0), (2, 0, 1)\}$
$F = \text{Vect}\{(0, 0, 1), (6, 1, 0)\}$
$G = \text{Vect}\{(1, -2, 0), (0, 3, 1)\}$

2. a. Sans calculer $E \cap F$, justifier que $\dim(E \cap F) \geq 1$.
La formule de Grassman donne : $\dim(E \cap F) = \dim(E) + \dim(F) - \dim(E + F)$.
Comme $E + F \subset \mathbb{R}^3$, on a donc $\dim(E + F) \leq 3$ et par suite : $\dim(E \cap F) \geq 2 + 2 - 3 \geq 1$.

b. Montrer que $(E \cap F) \oplus G = \mathbb{R}^3$

$$(x, y, z) \in E \cap F \cap G \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ x - 6y = 0 \\ 2x + y - 3z = 0 \end{cases} ; \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -6 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -7 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que $(x, y, z) \in E \cap F \cap G \Leftrightarrow x = y = z = 0$.
Ainsi $(E \cap F) + G = (E \cap F) \oplus G$.
De plus, $\dim(G) = 2$ et $\dim(E \cap F) \geq 1$ on a donc
$\dim((E \cap F) + G) = \dim((E \cap F) \oplus G) = \dim(E \cap F) + \dim(G) \geq 3$ et finalement, $(E \cap F) \oplus G = \mathbb{R}^3$.

3. a. Justifier que l'on peut trouver une base de $E \cap F$ à l'aide d'un produit vectoriel, puis la déterminer.
D'un point de vue géométrique, E et F sont des plans vectoriels dont des vecteurs normaux sont respectivement $\overrightarrow{n_1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{n_2} \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$. Ces vecteurs n'étant clairement pas colinéaires, l'intersection de ces plans vectoriels est la droite vectorielle dirigée par $\overrightarrow{n_1} \wedge \overrightarrow{n_2} \begin{pmatrix} -12 \\ -2 \\ -7 \end{pmatrix}$

b. Retrouver le résultat $(E \cap F) \oplus G = \mathbb{R}^3$.
$(12, 2, 7) \notin G$ car les coordonnées ne vérifient pas $2x + y - 3z = 0$, donc $(E \cap F) + G = (E \cap F) \oplus G$ et les dimensions donnent le résultat.

EXERCICE II

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Le but de l'exercice est de montrer que deux sous-espaces vectoriels de E de même dimension admettent un supplémentaire commun.
Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de E de dimension $r \in [\![0, n]\!]$.

1. On suppose dans cette question que $r = n$.
Montrer que E_1 est E_2 ont un supplémentaire commun, c'est-à-dire qu'il existe un sous-espace vectoriel F de E tel que $E_1 \oplus F = E_2 \oplus F = E$
Comme $r = \dim(E)$, on a $E_1 = E_2 = E$ qui admettent comme supplémentaire commun $\{0_E\}$.

2. On suppose que $r < n$ et que si F_1 et F_2 sont des sous-espaces vectoriels de E de dimension $r + 1$ alors ils admettent un supplémentaire commun dans E.

a. Montrer que $E_1 \cup E_2 \neq E$.
On suppose que $E_1 \cup E_2 = E$.
$\rightsquigarrow$ Si $E_1 \subset E_2$, alors $E_1 \cup E_2 = E_2$ donc $E_2 = E$ ce qui contredit l'hypothèse $r < n$. Donc $E_1 \not\subseteq E_2$. Ainsi, $\exists x \in E_1$ tel que $x \notin E_2$.
$\rightsquigarrow$ De même $E_2 \not\subseteq E_1$ donc $\exists y \in E_2$ tel que $y \notin E_1$.
$x + y \in E$ donc $x + y \in E_1 \cup E_2$.
$\rightsquigarrow$ Si $x + y \in E_1$ alors, comme E_1 est un sous-espace vectoriel de E et que $x \in E_1$ on a $(x + y) - x \in E_1$ c'est-à-dire $y \in E_1$ ce qui est exclu.
$\rightsquigarrow$ Si $x + y \in E_2$ alors, comme E_2 est un sous-espace vectoriel de E et que $y \in E_2$ on a $(x + y) - y \in E_2$ c'est-à-dire $x \in E_2$ ce qui est exclu.
On a ainsi montré par l'absurde que $E_1 \cup E_2 \neq E$.
Ainsi, il existe $x \in E$ tel que $x \notin E_1$ et $x \notin E_2$.

b. On note $F_1 = E_1 + \text{Vect}\{x\}$ et $F_2 = E_2 + \text{Vect}\{x\}$. Déterminer $\dim(F_1)$ et $\dim(F_2)$.
La formule de Grassman donne : $\dim(F_1) = \dim(E_1) + \dim(\text{Vect}\{x\}) - \dim(E_1 \cap \text{Vect}\{x\})$.
$x \neq 0_E$ car $0_E \in E_1 \cup E_2$ donc $\dim(\text{Vect}\{x\}) = 1$.
$x \notin E_1$ donc $E_1 \cap \text{Vect}\{x\} = \{0_E\}$ donc finalement $\dim(F_1) = \dim(E_1) + 1 - 0 = r + 1$;
de même $\dim(F_2) = r + 1$.

c. Montrer que E_1 et E_2 ont un supplémentaire commun.
Comme $\dim(F_1) = \dim(F_2) = r + 1$, par hypothèse, F_1 et F_2 admettent un supplémentaire commun F ;
on a : $F_1 \oplus F = F_2 \oplus F = E$ donc $E_1 \oplus \text{Vect}\{x\} \oplus F = E_2 \oplus \text{Vect}\{x\} \oplus F = E$.
On note $S = F \oplus \text{Vect}\{x\}$. Alors $E_1 \oplus S = E_2 \oplus S = E$, donc E_1 et E_2 ont un supplémentaire commun.

3. Conclure.
On a montré par récurrence descendante finie que deux sous-espaces vectoriels de E de même dimension admettent un supplémentaire commun.

EXERCICE III

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On note $E = \{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}), MA = AM = M\}$.

1. a. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ pour les lois usuelles.
- On a clairement $0_3 \in E$
- Soit $(\lambda, M, N) \in \mathbb{R} \times E^2$, alors $(\lambda M + N)A = \lambda MA + NA = \lambda AM + AN = A(\lambda M + N)$
  On a également $(\lambda M + N)A = \lambda MA + NA = \lambda M + N$ donc $(\lambda M + N) \in E$

E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

b. Montrer qu'aucune matrice de E n'est inversible.
Si $M \in E \cap \text{GL}_3(\mathbb{R})$ alors $MA = M \Rightarrow M^{-1}MA = M^{-1}M = \text{I}_3$ donc $A = \text{I}_3$ ce qui est faux.
Ainsi, aucune matrice de E n'est inversible.

2. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix} \in E$

a. Montrer que $a = c = g = k, \quad h = b, \quad$ et $f = d$, puis en déduire une base de E.
On a : $AM = \begin{pmatrix} g & h & k \\ d & e & f \\ a & b & c \end{pmatrix}$ et $MA = \begin{pmatrix} c & b & a \\ f & e & d \\ k & h & g \end{pmatrix}$
donc $M \in E \Leftrightarrow AM = MA = M \Leftrightarrow (a = c = g = k \quad \wedge \quad h = b \quad \wedge \quad f = d)$

$$\Leftrightarrow M = \begin{pmatrix} a & b & a \\ d & e & d \\ a & b & a \end{pmatrix} = a \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{M_1} + b \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{M_2} + d \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{M_3} + e \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{M_4}$$

On en déduit que $E = \text{Vect}\{M_1, M_2, M_3, M_4\}$. De plus, $\forall (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$,

$$\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 + \lambda_3 M_3 + \lambda_4 M_4 = 0_3 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_1 \\ \lambda_3 & \lambda_4 & \lambda_3 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$$

on a donc déterminé une famille libre et génératrice de E, donc une base.

b. On considère le sous-ensemble F de E tel que $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & a \\ b & c & b \\ a & b & a \end{pmatrix}, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$.

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E et en donner une base.
On a clairement, $M \in F \Leftrightarrow \exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, M = aM_1 + b(M_2 + M_3) + cM_4$.
On en déduit que $F = \text{Vect}\{M_1, M_2 + M_3, M_4\}$, donc que c'est un sous-espace vectoriel de E de base $(M_1, M_2 + M_3, M_4)$, puisque $\{M_1, M_2, M_3, M_4\}$ est libre.

3. On note φ l'application de F dans $\mathbb{R}$ qui à toute matrice $M = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 3}$ de F associe le nombre $\displaystyle\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} a_{i,j}$.

a. Montrer que φ est une application linéaire de F dans $\mathbb{R}$.
Soient $(a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 3}$ et $(b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 3}$ des matrices de F et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$\varphi\left(\lambda(a_{i,j})+(b_{i,j})\right)=\varphi\left((\lambda a_{i,j}+b_{i,j})\right)=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}(\lambda a_{i,j}+b_{i,j})=\lambda\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}a_{i,j}+\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}b_{i,j}$
$=\lambda\varphi\left((a_{i,j})\right)+\varphi\left((b_{i,j})\right)$.
On a donc $\varphi\in\mathscr{L}\left(F,\mathbb{R}\right)$.

b. Déterminer $\mathrm{Im}(\varphi)$. En déduire la dimension de $\mathrm{Ker}(\varphi)$.
$\mathrm{Im}(\varphi)\subset\mathbb{R}$ et en prenant par exemple $M=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ on a $\varphi(M)=1\neq 0$ donc $\varphi\neq 0$. On en déduit que $\mathrm{Im}(\varphi)=\mathbb{R}$, puis par le théorème du rang que $\dim\left(\mathrm{Ker}(\varphi)\right)=\dim(F)-\mathrm{rg}\left(\varphi\right)=2$.

c. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(\varphi)$.
$M=\begin{pmatrix}a&b&a\\b&c&b\\a&b&a\end{pmatrix}\in\mathrm{Ker}(\varphi)\Leftrightarrow 4a+4b+c=0\Leftrightarrow M=a\begin{pmatrix}1&0&1\\0&-4&0\\1&0&1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0&1&0\\1&-4&1\\0&1&0\end{pmatrix}$.
On en déduit que $\mathrm{Ker}(\varphi)=\mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1&0&1\\0&-4&0\\1&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\1&-4&1\\0&1&0\end{pmatrix}\right\}$.

PROBLEME

L'objectif de ce problème est de montrer par l'absurde que le nombre π est irrationnel (**Théorème de Lambert, 1761**). On suppose donc qu'il existe deux entiers naturels non nuls p et q tels que $\pi=\dfrac{p}{q}$.

1. On définit, pour $n\in\mathbb{N}^*$, le polynôme
$$P_n=\frac{1}{n!}X^n(p-qX)^n$$

a. Déterminer les racines de P_n et leurs multiplicités respectives.
Le polynôme est donné sous forme factorisée. Ses racines sont 0 et $\dfrac{p}{q}$, toutes deux de multiplicité n.

b. Déterminer explicitement les coefficients a_k de P_n.
P_n est de degré $2n$. La formule du binôme de Newton permet d'obtenir :
$$\begin{cases} a_k=0 & \text{pour } k\in[\![0,n-1]\!]\\ a_{n+k}=\dfrac{1}{n!}\dbinom{n}{k}p^{n-k}(-q)^k & \text{pour } k\in[\![0,n]\!]\end{cases}$$

c. En déduire, à l'aide de la formule de Taylor pour les polynômes, que pour tous les entiers $n\in\mathbb{N}^*$ et $k\in\mathbb{N}$,
$$P_n^{(k)}(0)\in\mathbb{Z}$$
La formule de Taylor pour les polynômes donne : $P_n=\sum_{k=0}^{2n}\dfrac{P_n^{(k)}(0)}{k!}X^k$ on a donc : $\forall n\in\mathbb{N}^*$:
$\leadsto$ pour $k\in[\![0,n-1]\!]$ et pour $k\geq 2n+1$: $P_n^{(k)}(0)=0\in\mathbb{Z}$
$\leadsto$ pour $k\in[\![0,n]\!]$: $P_n^{(n+k)}(0)=\dfrac{(n+k)!}{k!(n-k)!}p^{n-k}(-q)^k\in\mathbb{Z}$, car $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}=\dbinom{n}{k}\in\mathbb{N}$

d. Montrer que
$$P_n\left(\frac{p}{q}-X\right)=P_n(X)$$
$P_n\left(\dfrac{p}{q}-X\right)=\dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{p}{q}-X\right)^n\left(p-q\left(\dfrac{p}{q}-X\right)\right)^n=\dfrac{1}{n!}\dfrac{1}{q^n}(p-qX)^nq^nX^n=P_n(X)$
puis que
$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad\forall k\in\mathbb{N},\quad(-1)^kP_n^{(k)}\left(\frac{p}{q}-X\right)=P_n^{(k)}(X)$$
Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Pour $k\in\mathbb{N}$, on pose $H_k:(-1)^kP_n^{(k)}\left(\dfrac{p}{q}-X\right)=P_n^{(k)}(X)$.
Le résultat précédent donne H_0 vérifiée.
Si, pour $k\in\mathbb{N}$, H_k est vérifiée, alors en dérivant les deux membres de l'égalité on vérifie H_{k+1}. Ainsi, par principe de récurrence, la propriété H_k est vraie pour tout $k\in\mathbb{N}$.

e. En déduire que pour tous les entiers $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}$,

$$P_n^{(k)}\left(\frac{p}{q}\right) \in \mathbb{Z}$$

En évaluant le résultat précédent en 0 et à l'aide de la question c, on obtient pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}$: $P_n^{(k)}\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^k P_n^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$.

2. On définit pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale

$$I_n = \int_0^{\frac{p}{q}} P_n(t)\sin(t)\mathrm{d}t$$

a. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |I_n| \leq \frac{p^{2n+1}}{n!}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$; pour $t \in \left[0, \frac{p}{q}\right]$, $|P_n(t)\sin(t)| \leq \frac{p^n}{n!}t^n$ donc on a :
$|I_n| \leq \int_0^{\frac{p}{q}} |P_n(t)\sin(t)|\mathrm{d}t \leq \frac{p^n}{n!}\int_0^{\frac{p}{q}} t^n\mathrm{d}t = \frac{p^{2n+1}}{q^n(n+1)!} \leq \frac{p^{2n+1}}{n!}$

b. En déduire que (I_n) converge vers 0.

On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(p^2)^n}{n!} = 0$ donc par le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

c. Démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_n > 0$$

On a $\forall t \in \left[0, \frac{p}{q}\right]$, $\sin(t) \geq 0$ et $t^n(p-qt)^n \geq 0$, leur produit n'étant pas toujours nul sur l'intervalle.
Par positivité de l'intégrale, $I_n > 0$.

3. a. Démontrer que

$$I_n = P_n\left(\frac{p}{q}\right) + P_n(0) + \int_0^{\frac{p}{q}} P_n'(t)\cos(t)\mathrm{d}t$$

$t \mapsto P_n(t)$ et $t \mapsto -\cos(t)$ sont de classe C^1 sur $\left[0, \frac{p}{q}\right]$, donc le théorème d'intégration par parties donne :
$I_n = \left[-P_n(t)\cos(t)\right]_0^{\frac{p}{q}} + \int_0^{\frac{p}{q}} P_n'(t)\cos(t)\mathrm{d}t = P_n\left(\frac{p}{q}\right) + P_n(0) + \int_0^{\frac{p}{q}} P_n'(t)\cos(t)\mathrm{d}t$

On admet que l'on obtient, par intégrations par parties successives :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left(P_n^{(2k)}\left(\frac{p}{q}\right) + P_n^{(2k)}(0)\right) + (-1)^n\int_0^{\frac{p}{q}} P_n^{(2n+1)}(t)\cos(t)\mathrm{d}t$$

b. En déduire que $I_n \in \mathbb{N}^*$.

$\deg(P) = 2n$ donc $P_n^{(2n+1)} = 0$; le résultat précédent donne donc : $I_n = \sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\left(P_n^{(2k)}\left(\frac{p}{q}\right) + P_n^{(2k)}(0)\right)$.
D'après les questions 1.c) et 1.e) on a $I_n \in \mathbb{Z}$ puis, d'après la question 2.c), on a $I_n \in \mathbb{N}^*$.

c. Conclure.

On a montré que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, I_n \in \mathbb{N}^*$ donc $I_n \geq 1$ ce qui est contradictoire.
On en déduit que l'hypothèse formulée initialement est fausse, c'est-à-dire que π n'est pas un rationnel.

4. Question facultative : démontrer ce qui est admis en 3.a).

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $j \in \mathbb{N}$, on note $H_j : I_n = \sum\limits_{k=0}^{j}(-1)^k\left(P_n^{(2k)}\left(\frac{p}{q}\right) + P_n^{(2k)}(0)\right) + (-1)^j\int_0^{\frac{p}{q}} P_n^{(2j+1)}(t)\cos(t)\mathrm{d}t$.

H_0 a été démontrée à la question 3.a).

Soit $j \in \mathbb{N}$; on suppose H_j vérifiée. On a donc $I_n = \sum\limits_{k=0}^{j}(-1)^k\left(P_n^{(2k)}\left(\frac{p}{q}\right) + P_n^{(2k)}(0)\right) + (-1)^j\int_0^{\frac{p}{q}} P_n^{(2j+1)}(t)\cos(t)\mathrm{d}t$.

$t \mapsto P_n^{(2j+1)}(t)$ et $t \mapsto \sin(t)$ sont de classe C^1 sur $\left[0, \frac{p}{q}\right]$ donc le théorème d'intégration par parties donne :

$\displaystyle\int_0^{\frac{p}{q}} P_n^{(2j+1)}(t)\cos(t)\mathrm{d}t = \left[P_n^{(2j+1)}(t)\sin(t)\right]_0^{\frac{p}{q}} - \int_0^{\frac{p}{q}} P_n^{(2j+2)}(t)\sin(t)\mathrm{d}t = -\int_0^{\frac{p}{q}} P_n^{(2j+2)}(t)\sin(t)\mathrm{d}t$

$t \mapsto P_n^{(2j+2)}(t)$ et $t \mapsto -\cos(t)$ sont de classe C^1 sur $\left[0, \dfrac{p}{q}\right]$ donc le théorème d'intégration par parties donne :

$\displaystyle\int_0^{\frac{p}{q}} P_n^{(2j+2)}(t)\sin(t)\mathrm{d}t = \left[-P_n^{(2j+2)}(t)\cos(t)\right]_0^{\frac{p}{q}} + \int_0^{\frac{p}{q}} P_n^{(2j+3)}(t)\cos(t)\mathrm{d}t$

$\displaystyle= P_n^{(2j+2)}\left(\frac{p}{q}\right) + P_n^{(2j+2)}(0) + \int_0^{\frac{p}{q}} P_n^{(2j+3)}(t)\cos(t)\mathrm{d}t$

et donc : $\displaystyle I_n = \sum_{k=0}^{j}(-1)^k\left(P_n^{(2k)}\left(\frac{p}{q}\right) + P_n^{(2k)}(0)\right) + (-1)^{j+1}\left(P_n^{(2j+2)}\left(\frac{p}{q}\right) + P_n^{(2j+2)}(0) + \int_0^{\frac{p}{q}} P_n^{(2j+3)}(t)\cos(t)\mathrm{d}t\right) =$

$\displaystyle\sum_{k=0}^{j+1}(-1)^k\left(P_n^{(2k)}\left(\frac{p}{q}\right) + P_n^{(2k)}(0)\right) + (-1)^{j+1}\int_0^{\frac{p}{q}} P_n^{(2(j+1)+1)}(t)\cos(t)\mathrm{d}t$

On vérifie ainsi H_{j+1}.

Par principe de récurrence, on a donc démontré la propriété H_j pour tout $j \in \mathbb{N}$ et en particulier pour $j = n$ on obtient le résultat attendu.