CB N°11 - Applications linéaires - Sujet 1

EXERCICE 1

Soit $E = \mathbb{R}^3$. On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ sa base canonique.
On considère la famille $\mathscr{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ telle que

$$\varepsilon_1 = e_2, \quad \varepsilon_2 = e_1 - e_3, \quad \varepsilon_3 = 2e_1 - e_2 - e_3$$

et $f \in \mathscr{L}(E)$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.
$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}((-2, 1, 1)), \quad \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}((-1, 1, 1), (0, 1, 0))$.

2. Montrer que $\mathscr{B}'$ est une base de E.
$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; cette matrice est de rang 3.
On en déduit que la famille $\mathscr{B}'$ est libre et de cardinal 3, c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$.

3. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathscr{B}'$.
On note $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$; on trouve $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, puis :
$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}'}(f) = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

4. Que peut-on en déduire ? Retrouver ce résultat à l'aide d'un calcul matriciel.
Le résultat précédent montre que f est la projection sur $\mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ parallèlement à $\mathrm{Vect}(\varepsilon_3)$.
On retrouve que f est une projection en vérifiant que $A^2 = A$.

EXERCICE 2

Déterminer la nature de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice M suivante, ainsi que ses éléments caractéristiques :

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$M^2 = \mathrm{I}_3$ donc M est la matrice de la symétrie s par rapport à $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_3) = \mathrm{Vect}\left((1, 0, 1), (0, 1, 1)\right)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_3) = \mathrm{Vect}\left((1, -1, 1)\right)$.

EXERCICE 3

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer A^2 et en déduire que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$.
$A^2 = 0_3$ donc $f \circ f = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}$ et $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$.

2. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$, une base de $\mathrm{Im}(f)$, et vérifier le résultat précédent.
$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}((1,1,0),(-2,0,1))$ et $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}((3,1,-1))$.
$(3,1,-1) = (1,1,0) - (-2,0,1)$ on retrouve donc $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$.

3. On cherche une base $\mathscr{B} = (b_1, b_2, b_3)$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est :

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Justifier que $b_2 \in \mathrm{Im}(f)$, puis déterminer une base $\mathscr{B}$ qui réponde au problème posé.
La première colonne de la nouvelle matrice donne $f(b_1) = b_2$ donc $b_2 \in \mathrm{Im}(f)$; la deuxième colonne donne $f(b_2) = 0$ donc $b_2 \in \mathrm{Ker}(f)$. On prend donc $b_2 = (3;1;-1)$.
$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est la première colonne de A, donc b_2 est l'image par f du premier vecteur de la base canonique que l'on prend pour b_1. Enfin, en prenant $b_3 = (1,1,0) \in \mathrm{Ker}(f)$, on a une famille (b_1, b_2, b_3) libre car $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, et telle que $f(b_1) = b_2, f(b_2) = 0$ et $f(b_3) = 0$.
La famille (b_1, b_2, b_3) ainsi définie répond donc au problème posé.

EXERCICE 4

Soit $\varphi : \left| \begin{array}{lll} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & (2X+1)P + (1-X^2)P' \end{array} \right.$

1. Prouver que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
La linéarité de la dérivation donne la linéarité de φ.
Soit $P = a + bX + cX^2 \in \mathbb{R}_2[X]$; $\varphi(P) = a + b + (2a + b + 2c)X + (b + c)X^2 \in \mathbb{R}_2[X]$, donc φ est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

2. Écrire la matrice A de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Prouver que φ est un automorphisme et calculer A^{-1}.
A est inversible donc φ est un automorphisme, et $A^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

4. En déduire l'expression de $\varphi^{-1}(P)$ pour $P \in \mathbb{R}_2[X]$.
φ^{-1} a pour matrice A^{-1} dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. On déduit donc de la question précédente :
$\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3, \quad \varphi^{-1}\left(a + bX + cX^2\right) = \dfrac{1}{3}\left(a + b - 2c + (2a - b + 2c)X + (-2a + b + c)X^2\right)$.

CB n°11 - Applications linéaires - Sujet 2

EXERCICE 1
Soit $E = \mathbb{R}^3$. On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ sa base canonique.
On considère la famille $\mathscr{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ telle que

$$\varepsilon_1 = e_2 - e_3, \quad \varepsilon_2 = e_1 - e_2, \quad \varepsilon_3 = e_1 - e_2 - e_3$$

et $f \in \mathscr{L}(E)$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.
$\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$ donc f est bijective et $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^3$.

2. Montrer que $\mathscr{B}'$ est une base de E.
$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; cette matrice est de rang 3.
On en déduit que la famille $\mathscr{B}'$ est libre et de cardinal 3, c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$.

3. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathscr{B}'$.
On note $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; on trouve $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, puis :
$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}'}(f) = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

EXERCICE 2
Déterminer la nature de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice M suivante, ainsi que ses éléments caractéristiques :

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$M^2 = \mathrm{I}_3$ donc M est la matrice de la symétrie s par rapport à $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_3) = \mathrm{Vect}((1,0,-1),(1,-1,0))$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_3) = \mathrm{Vect}((1,-1,-1))$.

EXERCICE 3
Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Trouver une combinaison linéaire nulle (non triviale) entre les 3 colonnes de A.
$C_3 = 2C_1 - C_2$.

2. En déduire le rang de A et une base de $\mathrm{Im}(f)$.
Les deux premières colonnes de A n'étant pas proportionnelles, on en déduit que $\mathrm{rg}(A) = 2$ et par suite que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}((-1,1,1),(0,1,0))$.

3. Déduire de la combinaison linéaire établie à la question **1.** une base de $\mathrm{Ker}(f)$.
Un établira précisément le lien avec la question **1**.
$2C_1 - C_2 - C_3 = 0$ donc $f(2e_1 - e_2 - e_3) = 0$. On en déduit que le vecteur $(2, -1, -1)$ est dans le noyau de f. Le théorème du rang donne $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$ donc $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}((2, -1, -1))$.

4. Calculer A^2 et déduire des questions précédentes une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.
$A^2 = A$ donc f est la projection sur $\mathrm{Im}(f)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(f)$ donc dans la base $((-1, 1, 1), (0, 1, 0), (2, -1, -1))$, la matrice de f est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; elle est donc diagonale.

EXERCICE 4

Soit $\varphi : \left| \begin{array}{lcl} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & (2X+1)P + (1-X^3)P'' \end{array} \right.$

1. Prouver que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
La linéarité de la dérivation donne la linéarité de φ.
Soit $P = a + bX + cX^2 \in \mathbb{R}_2[X]$; $\varphi(P) = a + 2c + (2a+b)X + (2b+c)X^2 \in \mathbb{R}_2[X]$, donc φ est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

2. Écrire la matrice A de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Prouver que φ est un automorphisme et calculer A^{-1}.
A est inversible donc φ est un automorphisme, et $A^{-1} = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & 4 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

4. En déduire l'expression de $\varphi^{-1}(P)$ pour $P \in \mathbb{R}_2[X]$.
φ^{-1} a pour matrice A^{-1} dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. On déduit donc de la question précédente :
$\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3, \quad \varphi^{-1}\left(a + bX + cX^2\right) = \dfrac{1}{9}\left(a + 4b - 2c + (-2a + b + 4c)X + (4a - 2b + c)X^2\right).$