CB n°11 - Applications linéaires - Sujet 1

EXERCICE 1

Soit $E = \mathbb{R}^3$. On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ sa base canonique.
On considère la famille $\mathscr{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ telle que

$$\varepsilon_1 = e_2, \quad \varepsilon_2 = e_1 - e_3, \quad \varepsilon_3 = 2e_1 - e_2 - e_3$$

et $f \in \mathscr{L}(E)$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer $\operatorname{Ker}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$.

2. Montrer que $\mathscr{B}'$ est une base de E.

3. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathscr{B}'$.

4. Que peut-on en déduire ? Retrouver ce résultat à l'aide d'un calcul matriciel.

EXERCICE 2

Déterminer la nature de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice M suivante, ainsi que ses éléments caractéristiques :

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 3

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer A^2 et en déduire que $\operatorname{Im}(f) \subset \operatorname{Ker}(f)$.

2. Déterminer une base de $\operatorname{Ker}(f)$, une base de $\operatorname{Im}(f)$, et vérifier le résultat précédent.

3. On cherche une base $\mathscr{B} = (b_1, b_2, b_3)$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est :

$$\operatorname{mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Justifier que $b_2 \in \operatorname{Im}(f)$, puis déterminer une base $\mathscr{B}$ qui réponde au problème posé.

EXERCICE 4

Soit $\varphi : \left| \begin{array}{lcl} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & (2X+1)P + (1-X^2)P' \end{array} \right.$

1. Prouver que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

2. Écrire la matrice A de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

3. Prouver que φ est un automorphisme et calculer A^{-1}.

4. En déduire l'expression de $\varphi^{-1}(P)$ pour $P \in \mathbb{R}_2[X]$.

CB n°11 - Applications linéaires - Sujet 2

EXERCICE 1
Soit $E = \mathbb{R}^3$. On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ sa base canonique.
On considère la famille $\mathscr{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ telle que

$$\varepsilon_1 = e_2 - e_3, \quad \varepsilon_2 = e_1 - e_2, \quad \varepsilon_3 = e_1 - e_2 - e_3$$

et $f \in \mathscr{L}(E)$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

2. Montrer que $\mathscr{B}'$ est une base de E.

3. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathscr{B}'$.

EXERCICE 2
Déterminer la nature de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice M suivante, ainsi que ses éléments caractéristiques :

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 3
Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Trouver une combinaison linéaire nulle (non triviale) entre les 3 colonnes de A.

2. En déduire le rang de A et une base de $\mathrm{Im}(f)$.

3. Déduire de la combinaison linéaire établie à la question **1.** une base de $\mathrm{Ker}(f)$.
Un établira précisément <u>le lien</u> avec la question **1**.

4. Calculer A^2 et déduire des questions précédentes une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.

EXERCICE 4

$$\text{Soit } \varphi : \left| \begin{array}{lcl} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & (2X+1)P + (1-X^3)P'' \end{array} \right.$$

1. Prouver que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

2. Écrire la matrice A de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

3. Prouver que φ est un automorphisme et calculer A^{-1}.

4. En déduire l'expression de $\varphi^{-1}(P)$ pour $P \in \mathbb{R}_2[X]$.