Math. - CC 4 - Correction

EXERCICE I

On considère la suite (I_n) définie sur $\mathbb{N}$ par

$$I_n = \int_1^{\mathrm{e}} (\ln(x))^n \mathrm{d}x$$

1. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_n = \mathrm{e} - nI_{n-1}$$

Le théorème d'IPP avec $u(x) = (\ln(x))^n$ et $v'(x) = 1$ donne immédiatement le résultat.

2. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq I_n \leq \frac{\mathrm{e}}{n+1} \leq I_{n-1}$$

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [1, \mathrm{e}], (\ln(x))^n \geq 0$ donc par positivité de l'intégrale $I_n \geq 0$.
La question précédente donne pour $n \in \mathbb{N}$: $I_{n+1} = \mathrm{e} - (n+1)I_n \geq 0$ donc $\dfrac{\mathrm{e}}{n+1} \geq I_n$.
En utilisant l'égalité obtenue à la question précédente, et l'inégalité déjà démontrée, on a pour $n \in \mathbb{N}^*$:
$I_n = \mathrm{e} - nI_{n-1} \leq \dfrac{\mathrm{e}}{n+1}$ donc $I_{n-1} \geq \dfrac{\mathrm{e}}{n+1}$.

3. En déduire que

$$I_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}}{n}$$

L'encadrement précédent donne : $\dfrac{n}{n+2} \leq \dfrac{n}{\mathrm{e}} I_n \leq \dfrac{n}{n+1}$ donc le théorème d'encadrement donne $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{n}{\mathrm{e}} I_n = 1$ d'où l'équivalent.

EXERCICE II

Dans tout l'exercice n désigne un entier naturel non nul. On note

$$P_n = nX^{n+1} - (n+1)X^n$$

1. Donner le quotient et le reste de la division euclidienne de P_n par $X - 1$.

$P_n = \left(nX^n - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} X^k \right)(X-1) - 1$ (se vérifie en développant et par télescopage).

<u>Autre démonstration :</u> Le reste de la division euclidienne est $P_n(1) = -1$; de plus, on a :

$P_n + 1 = nX^{n+1} - nX^n - X^n + 1 = nX^n(X-1) + 1 - X^n = nX^n(X-1) + (1-X)\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} X^k$

On retrouve donc $P_n = (X-1)\left(nX^n - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} X^k \right) - 1$

2. On note $Q_n = nX^n - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} X^k$

a. Montrer que Q_n est divisible par $X - 1$. $Q_n(1) = 0$.

b. Expliciter le quotient de $X^{n+1} - 1$ par $X - 1$. $X^{n+1} - 1 = (X-1)\displaystyle\sum_{k=0}^{n} X^k$

c. En calculant de deux façons différentes le polynôme dérivé de $X^{n+1} - 1$, déterminer la factorisation de Q_n par $X - 1$.

On note $P = X^{n+1} - 1 = (X-1)\displaystyle\sum_{k=0}^{n} X^k$. On a : $P' = (n+1)X^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} X^k + (X-1)\sum_{k=1}^{n} kX^{k-1}$

On en déduit que $Q_n = nX^n - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} X^k = (n+1)X^n - \sum_{k=0}^{n} X^k = (X-1)\sum_{k=1}^{n} kX^{k-1}$.

d. En déduire le quotient et le reste de la division euclidienne de P_n par $(X-1)^2$.

$P_n = (X-1)Q_n - 1 = (X-1)^2 \displaystyle\sum_{k=1}^{n} kX^{k-1} - 1$

3. A l'aide de la formule de Taylor pour les polynômes, écrire le polynôme P_n dans la base $\big(1, X-1, \cdots, (X-1)^{n+1}\big)$ de $\mathbb{R}_{n+1}[X]$.

$P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \frac{P_n^{(k)}(1)}{k!}(X-1)^k$ avec $\forall k \in [\![0, n+1]\!], P_n^{(k)} = \dfrac{n(n+1)!}{(n+1-k)!}X^{n+1-k} - \dfrac{(n+1)!}{(n-k)!}X^{n-k}$ et donc

$P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \frac{(k-1)(n+1)!}{(n+1-k)!k!}(X-1)^k = \sum_{k=0}^{n+1}(k-1)\binom{n+1}{k}(X-1)^k$

EXERCICE III

Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les ensembles suivants :

$E = \text{Vect}\,\{(1,-1,2,0),(0,1,-2,1),(2,1,-2,3)\}$

$F = \big\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, 2x - y + z + t = 0 \text{ et } -x + 2y + t = 0\big\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$, et en déterminer une base.

$(x,y,z,t) \in F \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + t \\ z = -3y - 3t \end{cases} \Leftrightarrow (x,y,z,t) = y(2,1,-3,0) + t(1,0,-3,1) \Leftrightarrow (x,y,z,t) \in \text{Vect}\,\{(2,1,-3,0),(1,0,-3,1)\}$

On en déduit que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et les vecteurs $(2,1,-3,0)$ et $(1,0,-3,1)$ en constituent une base car ils sont générateurs et clairement pas colinéaires.

2. E et F sont-ils supplémentaires ?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

la famille $\{(1,-1,2,0),(0,1,-2,1),(2,1,-2,3)\}$ (qui engendre E) est donc liée, car de rang 2.

On en déduit que $E = \text{Vect}\,\{(1,-1,2,0),(0,1,-2,1)\}$.

Considérons la famille constituée des vecteurs des bases de E et de F :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{L_4 \leftarrow L_4 - L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \underset{L_4 \leftarrow L_4 - 3L_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

On en déduit que cette famille de 4 vecteurs est de rang 4, donc qu'elle est libre et génératrice de $\mathbb{R}^4$, et par suite que E et F sont des sous-espaces supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

EXERCICE IV

On se place dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions <u>définies sur $\mathbb{Z}$</u> à valeurs dans $\mathbb{R}$.
a_1 et a_2 désignent des réels non nuls.
Soit F l'ensemble des éléments f de E vérifiant la condition :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \qquad f(n) + a_1 f(n-1) + a_2 f(n-2) = 0$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

- La fonction constante égale à 0 est dans F.
- Soit $(\lambda, f, g) \in \mathbb{R} \times F^2$; $\forall n \in \mathbb{Z}$ on a :
  $(f + \lambda g)(n) + a_1(f + \lambda g)(n-1) + a_2(f + \lambda g)(n-2) =$
  $f(n) + a_1 f(n-1) + a_2 f(n-2) + \lambda(g(n) + a_1 g(n-1) + a_2 g(n-2)) = 0$ car f et g sont dans F.
  Donc $f + \lambda g \in F$

On en déduit que F est un sous-espace vectoriel de E.

2. Si a et b désignent deux réels quelconques, montrer qu'il existe un unique élément f de F tel que :

$$f(1) = a \quad \text{et} \quad f(2) = b$$

Si f est une fonction de F telle que $f(1) = a$ et $f(2) = b$, alors $f(3) = -a_1 f(2) - a_2 f(1)$ et on suppose ainsi construite f sur les entiers naturels jusqu'à $n-1$ (avec $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 3$).
Alors $f(n) = -a_1 f(n-1) - a_2 f(n-2)$ donc on construit ainsi $f(n)$.
D'autre part, puisque $a_2 \neq 0$, on a : pour tout $n \in \mathbb{N}$: $f(-n) = -\dfrac{1}{a_2}\left(a_1 f(-n+1) + f(-n+2)\right)$; on construit alors comme précédemment $f(-n)$ par récurrence, pour tout entier naturel n.
La fonction f ainsi obtenue est bien dans F, et c'est la seule qui vérifie $f(1) = a$ et $f(2) = b$.

3. Soient φ_1 la fonction de F telle que

$$\varphi_1(1) = 1 \quad \text{et} \quad \varphi_1(2) = 0,$$

et φ_2 la fonction de F telle que

$$\varphi_2(1) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi_2(2) = 1.$$

Montrer que la famille (φ_1, φ_2) est une base de F.
Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\lambda\varphi_1 + \mu\varphi_2 = 0$. Alors $\lambda\varphi_1(1) + \mu\varphi_2(1) = 0$ donc $\lambda = 0$ et par suite $\mu = 0$.
La famille (φ_1, φ_2) est donc libre.
De plus, $\forall f \in F, f(1) = f(1)\varphi_1(1) + f(2)\varphi_2(1)$ et $f(2) = f(1)\varphi_1(2) + f(2)\varphi_2(2)$.
Les fonctions de F étant définies par leurs valeurs en 1 et 2, on a donc : $f = f(1)\varphi_1 + f(2)\varphi_2$.
On en déduit que la famille (φ_1, φ_2) est génératrice de F.
En conclusion, la famille (φ_1, φ_2) est une base de F.

4. Trouver une **condition nécessaire et suffisante** sur $\alpha \in \mathbb{R}^*$ pour que la fonction f définie pour $n \in \mathbb{Z}$ par :

$$f(n) = \alpha^n$$

soit dans F.
$f \in F$ si, et seulement si $\forall n \in \mathbb{Z}, \alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + a_2\alpha^{n-2} = 0$ donc (puisque $\alpha \neq 0$), $\alpha^2 + a_1\alpha + a_2 = 0$.

5. On suppose que $\boxed{a_1^2 > 4a_2}$

a. Montrer que si α et β sont des réels distincts, les fonctions f et g définies pour $n \in \mathbb{Z}$ par

$$f(n) = \alpha^n \quad \text{et} \quad g(n) = \beta^n$$

sont linéairement indépendantes.
Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\lambda f + \mu g = 0$. Pour $n = 0$, on obtient $\lambda + \mu = 0$ et pour $n = 1$, on obtient : $\lambda\alpha + \mu\beta = 0$
On en déduit que $\lambda = \mu = 0$ et par suite que la famille (f, g) est libre.

b. En déduire une autre base de F.
$a_1^2 > 4a_2$, donc l'équation $x^2 + a_1 x + a_2 = 0$ admet deux solutions réelles distinctes, notées α et β.
On note f (resp. g) la fonction de F telle que $f(n) = \alpha^n$ (resp. $g(n) = \beta^n$).
D'après la question **4.**, f et g sont dans F ; d'après la question **5.a**, la famille (f, g) est libre ; d'après la question **3.**, $\dim(F) = 2$.
On a donc une famille libre de cardinal 2 dans F, c'est une nouvelle base de F.

6. On suppose que $\boxed{a_1^2 = 4a_2}$

a. Montrer que pour $\gamma = -\dfrac{a_1}{2}$, la fonction h définie pour $n \in \mathbb{Z}$ par $h(n) = n\gamma^n$ est dans F.
$a_1^2 = 4a_2$, donc l'équation $x^2 + a_1 x + a_2 = 0$ admet pour unique solution γ. De plus, pour $n \in \mathbb{Z}$, on a :
$h(n) + a_1 h(n-1) + a_2 h(n-2) = (n-2)\gamma^{n-2}(\gamma^2 + a_1\gamma + a_2) + \gamma^{n-1}(2\gamma + a_1) = 0$.
On en déduit que $\gamma \in F$.

b. Trouver une autre base de F.
γ étant solution de l'équation $x^2 + a_1 x + a_2 = 0$, la fonction k définie sur $\mathbb{Z}$ par $k(n) = \gamma^n$ est dans F.
Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\lambda k + \mu h = 0$; pour $n = 0$, on obtient $\lambda = 0$ et par suite $\mu = 0$.
Ainsi la famille (k, h) est libre, de cardinale 2, c'est donc une nouvelle base de F.